Examen de Logique, M2 IMD, 29 novembre 2022

Durée : 2h. Tous documents autorisés.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est recto-verso.
Dans un exercice, on peut toujours admettre les résultats des questions précédentes.

Exercice 1.

1. Démontrez $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ dans NK ou LK au choix.

2. L'énoncé suivant :

Pour toutes formules propositionnelles A et B,
on peut prouver $A \vdash B$ ou $B \vdash A$ dans LK.

est-il vrai ?

3. Expliquez pourquoi on ne peut pas dériver $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ dans LJ en général.

Exercice 2. Pour tout λ-terme pur s, on note $\eta(s) = \lambda x.s\,x$ (en choisissant $x \notin \mathsf{VL}(s)$: notez que $\eta(s)$ est défini de manière unique à α-équivalence près).

1. Montrez que si s est une abstraction alors $\eta(s) \to_\beta s$.[1]

2. Montrez que $\eta(s)\,t \to_\beta s\,t$.

3. Montrez que $\eta(s_1) =_\beta \eta(s_2)$ ssi, pour tout terme t, on a $s_1\,t =_\beta s_2\,t$.

4. Montrez que si s est β-normal[2] et $\eta(s)$ ne l'est pas, alors s est une abstraction.

5. Trouvez un terme s tel que $s \neq_\beta \eta(s)$.

On va maintenant considérer une version typée de η, définie sur les termes typés à la Church. Pour tout terme s, on note $\eta_A(s) \coloneqq \lambda x^A.s\,x$ (en choisissant encore $x \notin \mathsf{VL}(s)$).

6. Montrez que si $s : A \to B$ alors $\eta_A(s) : A \to B$.

On considère maintenant une relation $\to_\eta$ sur les termes simplement typés à la Church, donnée par les règles suivantes :

$$\frac{s : A \to B \qquad s \text{ n'est pas une abstraction}}{s \to_\eta \eta_A(s)}\ (\eta 0)$$

$$\frac{s \to_\eta s'}{\lambda x.s \to_\eta \lambda x.s'}\ (\eta 1) \qquad \frac{t \to_\eta t'}{s\,t\,u_1 \cdots u_n \to_\eta s\,t'\,u_1 \cdots u_n}\ (\eta 2)$$

7. Montrez que si $s : A$, s est β-normal et $s \to_\eta s'$ alors $s' : A$ et s' est β-normal.

On définit inductivement le poids d'un type par $a(X) = 0$ et $a(A \to B) = 1 + a(A) + a(B)$ (où X est un type de base) : $a(A)$ n'est rien d'autre que le nombre de $\to$ dans A.

1. Une astuce : c'est très facile si on choisit bien la variable de l'abstraction…
2. C'est-à-dire irréductible pour $\to_\beta$.

On définit inductivement un poids sur les termes bien typés en forme normale de la manière suivante :

$$d(\lambda x_1.\dots\lambda x_k.y\,t_1\cdots t_n) \coloneqq a(\mathsf{type}(y\,t_1\cdots t_n)) + \sum_{i=1}^{n} d(t_i)\ .$$

Par exemple, avec les variables x^X, $f^{X\to X}$ et $y^{X\to(X\to X)\to X}$, on a $d(x) = a(X) = 0$, $d(f) = a(X \to X) = 1$, $d(y) = a(X \to (X \to X) \to X) = 3$ et, comme $y\,x\,f : X$, $d(y\,x\,f) = a(X) + d(x) + d(f) = 1$.

8. Montrez que si $s : A$ est β-normal et $s \to_\eta s'$ alors $d(s') < d(s)$. [3]

On dit qu'un terme s est canonique s'il est β-normal et s'il n'admet pas de réduction $s \to_\eta s'$.

9. Déduisez de ce qui précède que si $s : A$ alors il existe un terme canonique s' tel que $\mathsf{N}(s) \to_\eta^* s'$.

10. Trouvez un terme canonique s tel que $\lambda x^{(X\to X)\to X}.x \to_\eta^* s$ avec X un type de base. [4]

11. Soit X un type de base : montrez que les seuls termes canoniques clos de type $(X \to X) \to (X \to X)$ sont les entiers de Church sur X. [5]

3. Vous pouvez même montrer $d(s) = d(s') + 1$ mais on ne s'en sert pas.

4. Indice : chercher les sous-termes qui contribuent au poids du terme.

5. On ne vous demande pas de redémontrer que les seuls termes clos en forme β-normale de ce type sont les entiers de Church $\underline{n} = \lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.f^n\,x$, et l'identité $\lambda x^{X\to X}.x$.