

Exercices: calcul propositionnel et calcul des prédicats

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2021–2022

Exercice 1. Pour chacune des formules suivantes, déterminez s'il s'agit d'une tautologie (en considérant A, B, C comme des variables propositionnelles).

1. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) \vee (C \Rightarrow A)$;
2. $(A \Rightarrow B) \vee B$;
3. $(A \Rightarrow B) \vee A$;
4. $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
5. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
6. $(A \Rightarrow \neg C) \vee (B \Rightarrow C)$.

Exercice 2. On considère la signature constituée d'un symbole de fonction unaire f , et d'un symbole de relation R binaire en plus de l'égalité.

Pour chacune des formules suivantes, trouvez une interprétation qui la valide et une qui la falsifie :

1. $\forall x \forall y f(x) = f(y)$;
2. $\forall x R(x, f(x))$;
3. $\forall x \exists y R(x, y)$;
4. $\exists x \forall y R(x, y)$.

Exercice 3. Trouvez une formule α -équivalente à

$$\forall y (x = y \vee \exists x (y = f(x))) \wedge \forall x (f(x) = x)$$

et telle que, dans toute sous-formule, aucune variable n'apparait à la fois libre et liée.

Exercice 4. Pour chacune des formules suivantes, déterminez s'il s'agit d'une tautologie (avec R un symbole de relation unaire et S un symbole de relation binaire).

1. $\forall x (\forall y S(x, y)) \Rightarrow S(x, x)$;
2. $\forall x \forall y S(x, y) \Rightarrow S(x, x)$;
3. $\forall x \exists y R(y) \Rightarrow R(x)$;
4. $\exists x \forall y R(y) \Rightarrow R(x)$.

Exercice 5. Considérons l'ensemble des formules sans quantificateurs \mathcal{F}_0 défini par :

$$\mathcal{F}_0 \ni F, G ::= R(t_1, \dots, t_n) \mid F \wedge G \mid F \vee G \mid \neg F$$

et celui des formules prénexes :

$$\mathcal{F}_{pre} \ni P, Q ::= F \mid \forall x P \mid \exists x P$$

c'est-à-dire l'ensemble des formules obtenues par une suite de quantifications à partir d'une formule sans quantificateurs.

Montrez que toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule prénexe.