Exercices: déduction naturelle

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2021–2022

Exercice 1. Donnez un arbre de déduction pour chacune des tautologies suivante :

1. $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$;
2. $(A \vee B) \vee C \Rightarrow A \vee (B \vee C)$;
3. $A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A$;
4. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow A \wedge B \Rightarrow C$;
5. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
6. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$;
7. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$;
8. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$;

Exercice 2. (Re)Démontrez chacune des lois de De Morgan pour les connecteurs en déduction naturelle :

1. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$;
2. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$;
3. $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$;
4. $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$;
5. $\neg(A \Rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$;
6. $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)$;
7. $\neg\neg A \vdash A$;
8. $A \vdash \neg\neg A$.

Dans quels cas avez-vous besoin de raisonner sur la vérité des formules ?

Exercice 3. Montrez que chacune des règles suivantes (appelées règles gauches) est dérivable dans DN_0 :

1. $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge_g)$
2. $\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee_g)$
3. $\dfrac{\Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}\ (\Rightarrow_g)$
4. $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\ (\neg_g)$
5. $\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash A}\ (\bot_g)$
6. $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \top \vdash A}\ (\top_g)$

Exercice 4. On dit que deux règles R_0 et R_1 sont équi-dérivables dans un système $\mathcal{L}$ ssi R_1 est dérivable dans $\mathcal{L} \cup \{R_0\}$ et R_0 est dérivable dans $\mathcal{L} \cup \{R_1\}$.

Montrez que les règles $(t.e.)$, $(r.a.)$, $(\neg\neg_e)$, $(Peirce)$ et $(contrap)$ sont deux-à-deux équi-dérivables dans DN_0 privé de $(t.e.)$.

Exercice 5. Si X est une variable propositionnelle, on note $\epsilon_1 X = X$ et $\epsilon_0 X = \neg X$. Pour tout n-uplet $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de variables propositionnelles, et toute fonction $d : \{X_1, \ldots, X_n\} \Rightarrow \{0, 1\}$ on note $\Delta(\vec{X}, d) \equiv \epsilon_{d(X_1)} X_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_{d(X_n)} X_n$. On note alors $\Sigma(\vec{X}) \equiv \bigvee_{d:\{X_1,\ldots,X_n\}\to\{0,1\}} \Delta(\vec{X}, d)$.

1. Montrez que pour tout n-uplet $\vec{X}$ de variables propositionnelles, le séquent $\vdash \Sigma(\vec{X})$ est dérivable.

2. Montrez que, pour toute formule A telle que $\vec{X}$ contient les variables propositionnelles de A, et pour tout $d : \{X_1, \ldots, X_n\} \to \{0, 1\}$, si $d(A) = 1$ alors $\Delta(\vec{X}, d) \vdash A$, et si $d(A) = 0$ alors $\Delta(\vec{X}, d) \vdash \neg A$.

3. Montrez que pour toute tautologie A dont les variables propositionnelles sont toutes dans $\vec{X}$, on peut dériver $\Sigma(\vec{X}) \vdash A$.

4. Montrez qu'une formule A est une tautologie ssi $\vdash A$ est dérivable : c'est le théorème de complétude pour la logique propositionnelle.

Exercice 6. Démontrez que les règles (aff) et (cont) sont admissibles dans $DN_0 \setminus \{(\mathit{aff}), (\mathit{cont})\}$.

Exercice 7. Démontrez que si

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

est dérivable dans $DN_0 \setminus \{(\mathit{aff})\}$ alors $\Gamma \subset \Gamma_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (en considérant les contextes comme des ensembles de formules).

Déduisez-en que la règle (aff) n'est pas dérivable dans $DN_0 \setminus \{(\mathit{aff})\}$.