Exercices: déduction naturelle, complétude et incomplétude pour la logique du premier ordre

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2021–2022

Exercice 1. On pose :

$$\begin{aligned} T &:= \forall x\, \forall y\, \forall z\, x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \\ I &:= \forall x\, \neg\, x < x \\ A &:= \forall x\, \forall y\, \neg(x < y \wedge y < x) \quad . \end{aligned}$$

Démontrez le séquent : $T, I \vdash A$.

Exercice 2. Démontrez chacune des lois de De Morgan pour les quantificateurs en déduction naturelle :

1. $\neg\forall x A \vdash \exists x \neg A$;

2. $\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$;

3. $\neg \exists x A \vdash \forall x \neg A$;

4. $\forall x \neg A \vdash \neg \exists x A$.

Dans quels cas avez-vous besoin de raisonner sur la vérité des formules ?

Exercice 3. Démontrez $(\exists x A) \wedge B \vdash \exists x (A \wedge B)$ en supposant $x \notin \mathsf{VL}(B)$.

Exercice 4. Montrez que chacune des règles suivantes (les règles gauches pour la quantification et l'égalité) est dérivable dans DN_1 :

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash C}{\Gamma, \forall x A \vdash C}\ (\forall_g) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad {\scriptstyle (x \notin \mathsf{VL}(\Gamma) \cup \mathsf{VL}(C))}}{\Gamma, \exists x A \vdash C}\ (\exists_g) \qquad \frac{\Gamma[t/x] \vdash A[t/x]}{\Gamma[u/x], t = u \vdash A[u/x]}\ (=_g)$$

Pour la dernière, on pourra commencer par montrer la dérivabilité de la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma, t = u \vdash A[u/x]}$$

Exercice 5. Montrez que la règle suivante

$$\frac{\Gamma \vdash A[0/x] \qquad \Gamma, A[z/x] \vdash A[Sz/x] \quad {\scriptstyle (z \notin \mathsf{VL}(\Gamma))}}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\mathit{Rec})$$

est dérivable dans $DN_1 \cup PA$.

Exercice 6. Démontrez successivement :

1. $PA \vdash \forall y\, 0 + y = y$,

2. $PA \vdash \forall x\, \forall y\, Sx + y = S(y + x)$,

3. $PA \vdash \forall x\, \forall y\, x + y = y + x$.

Exercice 7. Montrez, en utilisant le théorème de compacité, qu'il n'existe pas de théorie T sur le langage réduit à l'égalité telle que $\mathcal{I} \models T$ ssi $|\mathcal{I}|$ est fini.