Exercices: calcul des séquents

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2021–2022

Exercice 1. Éliminez les coupures dans la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,{\scriptstyle (ax)} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,{\scriptstyle (ax)}}{B, A \vdash B \wedge A}\,{\scriptstyle (\wedge_d)}}{A, B \vdash B \wedge A}\,{\scriptstyle (ech_g)}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}\,{\scriptstyle (\wedge_g)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash A}\,{\scriptstyle (ax)}}{B \wedge A \vdash A}\,{\scriptstyle (\wedge_g)}}{A \wedge B \vdash A}\,{\scriptstyle (cut)}$$

(notez qu'on a explicité une règle d'échange : je vous laisse deviner comment éliminer la coupure ici).

Exercice 2. On considère les formules propositionnelles suivantes :

$$A, B ::= X \mid \neg A \mid A \wedge B \mid A \vee B.$$

et le système MLL constitué des règles suivantes :

$$\dfrac{}{A \vdash A}\,{\scriptstyle (ax)} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,{\scriptstyle (cut)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\,{\scriptstyle (\wedge_d)} \qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (\wedge_g)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,{\scriptstyle (\vee_d)} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}\,{\scriptstyle (\vee_g)}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,{\scriptstyle (\neg_d)} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,{\scriptstyle (\neg_g)}$$

Notez qu'il s'agit de la version multiplicative de LK, *sans les règles structurelles.*

On définit le degré $d(A)$ d'une formule A par :

$$d(X) = 1 \qquad d(\neg A) = d(A) + 1 \qquad d(A \vee B) = d(A \wedge B) = \max(d(A), d(B)) + 1.$$

Le degré d'une règle de coupure est celui de la formule coupée. Et le degré d'une preuve est le maximum des degrés de ses coupures (0 s'il n'y en a pas).

1. Démontrez $\neg\neg A \vdash A$ dans ce système.

2. Démontrez que si π est une preuve de $\Gamma \vdash A, \Delta$ et π' est une preuve de $\Gamma', A \vdash \Delta'$ avec $\max(d(\pi), d(\pi')) < d(A)$ alors il existe une preuve π_0 de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ avec $d(\pi_0) < d(A)$.[1]

3. Déduisez-en que MLL admet l'élimination des coupures.

4. Montrez qu'on ne peut dériver ni $A \wedge A \vdash A$ ni $A \vdash A \wedge A$ dans MLL.

5. Déduisez-en que ni les règles structurelles, ni les règles additives ne sont admissibles dans ce système (qui est donc strictement plus faible que LK).

1. Notez qu'on n'a pas besoin de généraliser les coupures ici.