Exercices: λ-calcul

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates, 2021–2022

Exercice 1. Regroupez les termes égaux (c'est-à-dire α-équivalents) parmi :

$$\lambda x.\lambda y.((x\,y)\,y) \qquad \lambda x.\lambda y.(x\,(y\,y)) \qquad \lambda y.\lambda x.((y\,x)\,x) \qquad \lambda x.((x\,x)\,x)$$
$$\lambda x.\lambda x.((x\,x)\,x) \qquad \lambda z.\lambda z.((z\,z)\,z) \qquad \lambda x.\lambda z.((z\,z)\,z) \qquad \lambda z.\lambda x.((z\,z)\,z)$$

Exercice 2. Calculez $(\lambda x.\lambda y.((x\,z)\,y))[x'\,y/z]$.

Exercice 3. Construisez le graphe orienté de toutes les β-réductions possibles depuis le terme $t \coloneqq \underline{2}\,I\,x$. Vous devriez obtenir 6 nœuds (les termes obtenus par réduction depuis t) et 9 flèches (les β-réductions) dont 3 paires de flèches parallèles (lorsque les réductions de deux redex distincts produisent le même terme réduit). Le terme t est la seule source (nœud sans flèche entrante) du graphe et le terme x est le seul puits (nœud sans flèche sortante) : c'est l'unique forme irréductible.

Même chose avec le terme $u \coloneqq I\,(\underline{0}\,\Omega)$: 4 nœuds et 6 flèches, dont 2 boucles.

Exercice 4. Soit $\to$ une relation binaire fortement confluente.

1. Montrez que si $a \to^n b$ et $a \to c$ alors il existe d tel que $c \to^n d$ et $b \to d$.

2. Montrez que si $a \to^n b$ et $a \to^k c$ alors il existe d tel que $c \to^n d$ et $b \to^k d$.

3. Déduisez-en que $\to$ est confluente.

Exercice 5. Soient :

— $\to$ une relation binaire ;

— $\to^*$ sa fermeture réflexive et transitive ;

— $\simeq$ sa fermeture réflexive, symétrique et transitive ;

— $\vartriangle$ la relation telle que $a \vartriangle b$ s'il existe c tel que $c \to^* a$ et $c \to^* b$,

— $\triangledown$ la relation telle que $a \triangledown b$ s'il existe c tel que $a \to^* c$ et $b \to^* c$.

Supposons que $\to$ est confluente, c'est-à-dire que $\to^*$ est fortement confluente, c'est-à-dire encore que si $a \vartriangle b$ alors $a \triangledown b$.

1. Montrez que pour tous $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que, pour $1 \leq i \leq n$, $a_{i-1} \vartriangle a_i$, on a $a_0 \triangledown a_n$.

2. Montrez que $a \simeq b$ ssi il existe une suite finie $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que $a = a_0$, $b = a_n$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $a_{i-1} \vartriangle a_i$.

3. Déduisez-en la propriété de Church–Rosser pour $\to$: si $a \simeq b$ alors $a \triangledown b$.

Exercice 6. Les termes suivants ont-ils une forme normale ? Si oui, donnez une suite de réductions qui mène à cette forme normale. Sinon, expliquez pourquoi.

1. $S\,I\,I$

2. $S\,K\,K$

3. $(\lambda x.\lambda y.y\,I\,x)\,\Omega\,K$

4. $(\lambda x.\lambda y.y\,x\,I)\,\Omega\,K$

5. $\Delta\,\lambda y.\lambda z.z\,y$

6. $\underline{n}\,I$ pour $n = 0, 1, 2$

7. $\underline{n}\,\Omega$ pour $n = 0, 1, 2$

8. $\Delta\,\lambda x.x\,x\,x$

Exercice 7.

1. Montrez que si $s \to_{\beta_t} s'$ alors $s[t/x] \to_{\beta_t} s'[t/x]$.

2. Déduisez-en que si s n'a pas de forme normale de tête alors $s[t/x]$ non plus.

3. Déduisez-en que si s n'a pas de forme normale de tête alors $s\,t$ non plus.

4. Trouvez des terme s et t tels que $s\,t$ soit normalisable mais pas s.