TD: normalisation forte pour le λ-calcul simplement typé

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates

L'objectif est de montrer le théorème de normalisation forte.

On note $d(A)$ le degré ($=$ le nombre de $\to$) du type A. Si s est un λ-terme, on note $\#s$ la taille de s. Enfin si s est fortement normalisable, alors on note $\ell(s)$ la longueur maximum d'une suite de réductions issues de s : $\ell(s) \coloneqq \max\{n \mid s \to_\beta^n \mathsf{N}(s)\}$. En particulier si $s \to_\beta s'$ on a $\ell(s) > \ell(s')$.

Exercice 1. Montrez que si s, u_0, …, u_n sont fortement normalisables et si, pour toute réduction $s \to_\beta^* \lambda x.w$, le terme $(w[u_0/x])\, u_1 \cdots u_n$ est fortement normalisable, alors $r \coloneqq s\, u_0 \cdots u_n$ est fortement normalisable.

Indice : Raisonnez par récurrence sur $\ell(s) + \sum_{i=0}^{n} \ell(u_i)$, et montrez que chaque réduit de r est fortement normalisable.

Exercice 2. Montrez que si $\Gamma, x : A \vdash s : B$ et $\Gamma \vdash t : A$, et si s et t sont fortement normalisables alors $s' \coloneqq s[t/x]$ est fortement normalisable.

Indice : Raisonnez par récurrence sur le triplet $(d(A), \ell(s), \#s)$, ordonné lexicographiquement. Inspectez la structure de tête de s, et utilisez judicieusement l'exercice précédent quand s a un redex de tête, et quand x est la variable de tête de s (le cas où s est en forme normale de tête et x n'est pas sa variable de tête est immédiat par induction).

Exercice 3. Montrez que si $\Gamma \vdash s : A \to B$ et $\Gamma \vdash t : A$, et si s et t sont fortement normalisables alors $s\, t$ est fortement normalisable.

Indice : Raisonnez par récurrence sur $\ell(s) + \ell(t)$, et montrez que tous les réduits de $s\, t$ sont fortement normalisables, en utilisant l'exercice précédent dans le cas d'un redex.

Exercice 4. Montrez que si s est typable alors s est fortement normalisable.