Exercices: λ-calcul typé

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates

Exercice 1. Déterminez tous les jugements de typage (avec des types simples) pour les termes suivants :

1. K ; **2.** S ; **3.** $\lambda x.\lambda y.x\,y\,y$; **4.** $\lambda x.K\,x\,(x\,I)$.

Exercice 2. Les termes suivants sont-ils typables avec des types simples ? Si oui, donnez une dérivation de typage. Sinon, argumentez.

1. $\lambda x.x\,x\,x$;
2. $\lambda x.\lambda y.y\,x\,x$;
3. $\lambda x.\lambda y.y\,x\,y$;
4. $\lambda x.\lambda y.y\,(x\,y)$;
5. $\lambda x.I\,x\,(I\,x)$;
6. $\lambda f.f\,(\lambda x.f\,\lambda d.x)$.

Exercice 3. Si A est un type, on note $d(A)$ le degré de A, défini comme pour la preuve d'élimination des coupures : $d(X) \coloneqq 1$ et $d(A \to B) = \max(d(A)+1, d(B))$.

Si $(\lambda x^A.s)\,t$ est un redex typé (à la Church), son degré est le degré de A. À tout λ-terme typé s, on associe :

- $d(s)$: le degré maximal d'un redex de s (0 s'il n'y en pas) ;
- $n(s)$: le nombre de redex de degré $d(s)$ dans s.

1. Montrez que si $\max(d(s), d(t)) < d(A)$ alors $d(s[t/x]) < d(A)$ (attention : il peut y avoir de nouveaux redex dans $s[t/x]$).

2. Montrez que si $d(s) > 0$, alors il existe une réduction $s \to_\beta s'$ telle que : ou bien $d(s') < d(s)$, ou bien $d(s') = d(s)$ et $n(s') < n(s)$.

3. Déduisez-en qu'un terme typé est normalisable (sans utiliser le théorème de normalisation forte, bien sûr).