TD: au-delà des types simples

Lionel Vaux Auclair

M2 IMD, Logique et automates

1 Types simples et système F

Exercice 1. On définit le λ-terme $s \coloneqq \lambda x.x\,x\,\lambda y.y$.

1. Le terme s est-il typable avec des types simples ?

2. Donnez une dérivation de typage de s dans le système F à la Curry.

2 Autour du système R

2.1 Préliminaire

Dans ce TD on s'appuie sur la notion de *multiensemble fini*.

On note $[a_1, \dots, a_n]$ le multiensemble fini constitué des éléments $a_1, \dots, a_n$: dans un tel multiensemble, l'ordre des éléments ne compte pas mais le nombre d'occurrences de chaque élément est important (par exemple $[a, b, b] = [b, a, b] \neq [a, b]$).

Si A est un ensemble, on note $A^!$ l'ensemble des multiensembles finis sur A. On peut voir $A^!$ de manière équivalente comme l'ensemble des listes d'éléments de A quotienté par l'action des permutations ; ou bien comme l'ensemble des fonctions $A \to \mathbf{N}$, à support fini ; ou encore comme le monoïde commutatif librement engendré par A.

On note $[]$ le multiensemble vide et si $\bar{a} = [a_1, \dots, a_n]$ et $\bar{b} = [b_1, \dots, b_k]$, on note leur concaténation $\bar{a} \otimes \bar{b} = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k]$.

2.2 Le système R

On va considérer des types de la forme $\bar{A} \to B$, où B est un type et $\bar{A}$ est un multiensemble fini de types.

Les types du système R sont donnés par :

$$R \ni A, B, \dots \coloneqq X \mid [A_1, \dots, A_n] \to B$$

et un contexte de typage est une fonction $\Gamma : \mathcal{V} \to R^!$ telle que $\Gamma(x) = []$ pour presque tout x. On note $\Gamma = x_1 : \bar{A}_1, \dots, x_n : \bar{A}_n$ lorsque les variables $x_i \in \mathcal{V}$ sont deux-à-deux distinctes, $\Gamma(x_i) = \bar{A}_i$ et $\Gamma(y) = []$ pour tout $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Si Γ et Γ' sont des contextes du système R, on note $\Gamma \otimes \Gamma'$ la concaténation point par point : $(\Gamma \otimes \Gamma')(x) = \Gamma(x) \otimes \Gamma'(x)$.

Les règles du système R sont les suivantes :

$$\frac{}{x : [A] \vdash x : A}\,(var) \qquad \frac{\Gamma, x : \bar{A} \vdash s : B}{\Gamma \vdash \lambda x.s : \bar{A} \to B}\,(\lambda)$$

$$\frac{\Gamma_0 \vdash s : [A_1, \ldots, A_n] \to B \qquad \Gamma_1 \vdash t : A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash t : A_n}{\Gamma_0 \otimes \cdots \otimes \Gamma_n \vdash s\,t : B}\,(app) \qquad .$$

Notez que dans le cas de la variable, l'hypothèse de typage exige un multiensemble singleton. Et dans le cas de l'application, on a autant de dérivations de typage de l'argument que la taille du multiensemble à gauche de la flèche.

Exercice 2. Dans ce système, donnez tous les typages possibles de $\lambda x.x$, de $\underline{0}$, de $\underline{1}$ et de $\underline{0}\,\Omega$

Exercice 3. Montrez que si $\Gamma_0, x : [A_1, \ldots, A_n] \vdash s : B$ et $\Gamma_i \vdash t : A_i$ pour $1 \leq i \leq n$ alors $\Gamma_0 \otimes \cdots \otimes \Gamma_n \vdash s[t/x] : B$.

Exercice 4. Montrez la réduction du sujet : si $\Gamma \vdash s : A$ et $s \to_\beta s'$ alors $\Gamma \vdash s' : A$.

Le système R est une sorte de système de types avec intersubsection, dans lequel on remplace l'opération idempotente ($A \cap A = A$) par une opération non-idempotente (on a $\bar{A} \otimes \bar{A} \neq \bar{A}$). En particulier il admet la réciproque de la réduction du sujet :

Lemme 1. *Si $\Gamma \vdash s' : A$ et $s \to_\beta s'$ alors $\Gamma \vdash s : A$.*

On admet ce résultat dans la suite.

2.3 Normalisation de tête

On va montrer que les termes typables dans le système R sont exactement les termes normalisables de tête.

Exercice 5. Montrez que toute forme normale de tête est typable dans le système R.

Si π est une dérivation de typage, la *taille* de π est le nombre $\#\pi$ d'instances de règles dans π.

Exercice 6. Reprenez l'exercice 3, et montrez que si π_0 est la dérivation de $\Gamma_0, x : [A_1, \ldots, A_n] \vdash s : B$ et π_i est la dérivation de $\Gamma_i \vdash t : A_i$ pour $1 \leq i \leq n$ alors on obtient une dérivation π' de $\Gamma_0 \otimes \cdots \otimes \Gamma_n \vdash s[t/x] : B$ telle que $\#\pi' \leq \sum_{i=0}^{n} \#\pi_i$.

Exercice 7. Montrez que si $s \to_{\beta_t} s'$, et si π est une dérivation de $\Gamma \vdash s : A$ alors il existe une dérivation π' de $\Gamma \vdash s' : A$ avec $\#\pi > \#\pi'$.

Exercice 8. Déduisez de ce qui précède que s est typable dans R ssi s est normalisable de tête.