

Exercices: calcul propositionnel

Lionel Vaux Auclair

Logique
HUGO@Centrale, 2021–2022

Exercice 1. Pour chacune des formules suivantes, dessinez l'arbre correspondant, donnez la liste de ses formules atomiques (toutes les lettres dénotent des variables propositionnelles), et indiquez quelles sont distributions de valeurs de vérité qui la valident.

1. X ;
2. $\top \vee \perp$;
3. $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$;
4. $(X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee \neg X \vee Z$;
5. $X \Rightarrow Y \Rightarrow Z \Rightarrow \perp$;
6. $X \wedge \neg X$.

Exercice 2. Parmi les formules de l'exercice précédent, puis pour les formules suivantes, déterminez lesquelles sont valides, lesquelles sont satisfaisables, et lesquelles ne le sont pas (en considérant A, B, C comme des variables propositionnelles).

1. $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
2. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;
3. $(A \Rightarrow \neg C) \vee (B \Rightarrow C)$;
4. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) \vee (C \Rightarrow A)$;
5. $(A \Rightarrow B) \vee B$;
6. $(A \Rightarrow B) \vee A$.

Exercice 3. Pour chacune des formules suivantes, donnez une formule équivalente n'utilisant que les connecteurs \wedge , \vee et \neg .

1. $\neg(A \Rightarrow B)$;
2. $A \Leftrightarrow B$;
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$.

Exercice 4.

1. Combien y a-t-il de formules propositionnelles sur 2 variables, à équivalence près ?
2. Donnez un représentant le plus simple possible pour chaque classe.

Exercice 5.

1. Combien y a-t-il de distributions de valeurs de vérité sur n variables propositionnelles ?
2. Pour vérifier la validité d'une formule, est-il raisonnable de tester *toutes* les dvv possibles ?

Exercice 6. Partant de l'exemple de circuit donné dans le cours, proposez un circuit qui calcule une formule équivalente, avec strictement moins de nœuds.

Exercice 7. Construisez un circuit qui calcule le successeur d'un nombre sur 4 bits :

— le circuit a 4 entrées e_0, e_1, e_2, e_3 et 5 sorties s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 ;

- si les valeurs des entrées sont les bits de l'écriture binaire d'un entier naturel $n < 16$, alors les valeurs des sorties donnent l'écriture binaire de $n + 1$.

Exercice 8. Construisez un circuit qui calcule la somme sur 2 bits :

- le circuit a 4 entrées x_0, x_1, y_0, y_1 et 3 sorties s_0, s_1, s_2 ;
- si les valeurs de x_0 et x_1 (resp. y_0 et y_1) sont les bits de l'écriture binaire d'un entier naturel $x < 4$ (resp. $y < 4$), alors les valeurs des sorties donnent l'écriture binaire de $x + y$.