Calcul des prédicats

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Logique du premier ordre

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

- On remplace les propositions indéterminées (les variables $X, Y, Z, \ldots$) par des propositions atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$ où :
  - $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes représentant des éléments d'un ensemble (les individus) ;
  - R est un symbole de relation représentant une propriété vérifiée ou non suivant les valeurs de $t_1, \ldots, t_n$.
- Les termes sont des expressions construites à partir des variables d'individus par application de symboles de fonctions.
- On peut quantifier sur les individus : si A est une formule, alors $\forall x.A$ et $\exists x.A$ aussi.

Logique du premier ordre

$$\forall \epsilon . \Big(\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta . \Big(\delta > 0 \land \forall x . (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \Big) \Big)$$

- On remplace les propositions indéterminées (les variables $X, Y, Z, \ldots$) par des propositions atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$ où :
  - $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes représentant des éléments d'un ensemble (les individus) ;
  - R est un symbole de relation représentant une propriété vérifiée ou non suivant les valeurs de $t_1, \ldots, t_n$.
- Les termes sont des expressions construites à partir des variables d'individus par application de symboles de fonctions.
- On peut quantifier sur les individus : si A est une formule, alors $\forall x . A$ et $\exists x . A$ aussi.

Logique du premier ordre

$$\forall \epsilon. \left(I(0, \epsilon) \Rightarrow \exists \delta. \left(I(0, \delta) \wedge \forall x. \big(I(a(m(x, x_0)), \delta) \Rightarrow I(a(m(f(x), f(x_0))), \epsilon) \big) \right) \right)$$

- On remplace les propositions indéterminées (les variables $X, Y, Z, \ldots$) par des propositions atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$ où :
  - $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes représentant des éléments d'un ensemble (les individus) ;
  - R est un symbole de relation représentant une propriété vérifiée ou non suivant les valeurs de $t_1, \ldots, t_n$.
- Les termes sont des expressions construites à partir des variables d'individus par application de symboles de fonctions.
- On peut quantifier sur les individus : si A est une formule, alors $\forall x.A$ et $\exists x.A$ aussi.

Logique du premier ordre

$$\forall\epsilon.\left(I(0,\epsilon)\Rightarrow\exists\delta.\left(I(0,\delta)\wedge\forall x.\big(I(a(m(x,x_0)),\delta)\Rightarrow I(a(m(f(x),f(x_0))),\epsilon)\big)\right)\right)$$

- On remplace les propositions indéterminées (les variables $X, Y, Z, \ldots$) par des propositions atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$ où :
  - $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes représentant des éléments d'un ensemble (les individus) ;
  - R est un symbole de relation représentant une propriété vérifiée ou non suivant les valeurs de $t_1, \ldots, t_n$.
- Les termes sont des expressions construites à partir des variables d'individus par application de symboles de fonctions.
- On peut quantifier sur les individus : si A est une formule, alors $\forall x.A$ et $\exists x.A$ aussi.
- La vérité d'une formule dépend :
  - de la structure dans laquelle on l'interprète ;
  - de la valeur des variables d'individus (l'environnement) qui y apparaissent librement.

Logique du premier ordre

$$\forall \epsilon. \left(I(0, \epsilon) \Rightarrow \exists \delta. \left(I(0, \delta) \land \forall x. \big(I(a(m(x, x_0)), \delta) \Rightarrow I(a(m(f(x), f(x_0))), \epsilon) \big) \right) \right)$$

- On remplace les propositions indéterminées (les variables $X, Y, Z, \ldots$) par des propositions atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$ où :
  - $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes représentant des éléments d'un ensemble (les individus) ;
  - R est un symbole de relation représentant une propriété vérifiée ou non suivant les valeurs de $t_1, \ldots, t_n$.
- Les termes sont des expressions construites à partir des variables d'individus par application de symboles de fonctions.
- On peut quantifier sur les individus : si A est une formule, alors $\forall x.A$ et $\exists x.A$ aussi.
- La vérité d'une formule dépend :
  - de la structure dans laquelle on l'interprète ;
  - de la valeur des variables d'individus (l'environnement) qui y apparaissent librement.

Exemple ($\exists y.x + y = 0$)

Vrai si $x = 0$ dans $\mathbf{N}$ et dans $\{0, 1\}$ avec $+ = \max$. Toujours vrai dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Termes

- On fixe un ensemble $\mathcal{V}$ (infini, dénombrable) de variables d'individus, notées $x, y, \ldots$
- On se donne une signature $\mathcal{S}$ de symboles de fonctions.

Définition

L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ des termes sur la signature $\mathcal{S}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{V}$ et clos par application des symboles de fonctions, en respectant l'arité :

$$\mathcal{T}_{\Sigma} \ni s, t, u, \ldots ::= x \mid f(s_1, \ldots, s_{a(f)})$$

$$(x \in \mathcal{V},\ f \in \mathcal{S})$$

Termes

- On fixe un ensemble $\mathcal{V}$ (infini, dénombrable) de variables d'individus, notées $x, y, \ldots$
- On se donne une signature $\mathcal{S}$ de symboles de fonctions.

Définition

L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ des termes sur la signature $\mathcal{S}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{V}$ et clos par application des symboles de fonctions, en respectant l'arité :

$$\mathcal{T}_{\Sigma} \ni s, t, u, \ldots ::= x \mid f(s_1, \ldots, s_{a(f)})$$

$$(x \in \mathcal{V},\ f \in \mathcal{S})$$

En bref : un terme = une expression.

Exemple

Avec $f, g \in \mathcal{S}$, $a_{\mathcal{S}}(f) = 2$ et $a_{\mathcal{S}}(g) = 0$: $f(x, y)$ et $g() \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.

Termes

- On fixe un ensemble $\mathcal{V}$ (infini, dénombrable) de variables d'individus, notées $x, y, \ldots$
- On se donne une signature $\mathcal{S}$ de symboles de fonctions.

Définition

L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ des termes sur la signature $\mathcal{S}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{V}$ et clos par application des symboles de fonctions, en respectant l'arité :

$$\mathcal{T}_{\Sigma} \ni s, t, u, \ldots ::= x \mid f(s_1, \ldots, s_{a(f)})$$

$$(x \in \mathcal{V},\ f \in \mathcal{S})$$

En bref : un terme = une expression.

Exemple

Avec $+, 0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{S}}$, $a_{\mathcal{S}}(+) = 2$ et $a_{\mathcal{S}}(0) = 0$: $+(x, y)$ et $0() \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.

Termes

- On fixe un ensemble $\mathcal{V}$ (infini, dénombrable) de variables d'individus, notées $x, y, \ldots$
- On se donne une signature $\mathcal{S}$ de symboles de fonctions.

Définition

L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ des termes sur la signature $\mathcal{S}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathcal{V}$ et clos par application des symboles de fonctions, en respectant l'arité :

$$\mathcal{T}_{\Sigma} \ni s, t, u, \ldots ::= x \mid f(s_1, \ldots, s_{a(f)})$$

$$(x \in \mathcal{V},\ f \in \mathcal{S})$$

En bref : un terme = une expression.

Exemple

Avec $+, 0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{S}}$, $a_{\mathcal{S}}(+) = 2$ et $a_{\mathcal{S}}(0) = 0$: $x + y$ et $0 \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.

Formules du premier ordre (= prédicats)

On étend la signature avec un ensemble de symboles de relations : $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, a)$.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}_\Sigma$ des formules sur la signature Σ est l'ensemble d'expressions défini par :

$$\mathcal{F}_\Sigma \ni A, B, \ldots \;::=\; R(t_1, \ldots, t_{a(R)}) \mid A \wedge B \mid \neg A \mid \cdots \mid \forall x.A \mid \exists x.A$$

$$(R \in \mathcal{R},\; t_1, \ldots, t_{a(R)} \in \mathcal{T}_\Sigma = \mathcal{T}_\mathcal{S})$$

Une formule = une expression construite par application des connecteurs et quantificateurs, à partir des formules atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$.

Formules du premier ordre (= prédicats)

On étend la signature avec un ensemble de symboles de relations : $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, a)$.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}_\Sigma$ des formules sur la signature Σ est l'ensemble d'expressions défini par :

$$\mathcal{F}_\Sigma \ni A, B, \ldots \ ::= \ R(t_1, \ldots, t_{a(R)}) \mid A \wedge B \mid \neg A \mid \cdots \mid \forall x.A \mid \exists x.A$$

$$(R \in \mathcal{R},\ t_1, \ldots, t_{a(R)} \in \mathcal{T}_\Sigma = \mathcal{T}_\mathcal{S})$$

Une formule = une expression construite par application des connecteurs et quantificateurs, à partir des formules atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$.

Exemple

En ajoutant $R \in \mathcal{R}$ avec $a(R) = 2$: $\exists y.R(x + y, 0) \in \mathcal{F}$.

Formules du premier ordre (= prédicats)

On étend la signature avec un ensemble de symboles de relations : $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{R}, a)$.

Définition

L'ensemble $\mathcal{F}_\Sigma$ des formules sur la signature Σ est l'ensemble d'expressions défini par :

$$\mathcal{F}_\Sigma \ni A, B, \ldots \ ::= \ R(t_1, \ldots, t_{a(R)}) \mid A \wedge B \mid \neg A \mid \cdots \mid \forall x.A \mid \exists x.A$$

$$(R \in \mathcal{R},\ t_1, \ldots, t_{a(R)} \in \mathcal{T}_\Sigma = \mathcal{T}_\mathcal{S})$$

Une formule = une expression construite par application des connecteurs et quantificateurs, à partir des formules atomiques $R(t_1, \ldots, t_n)$.

Exemple

En ajoutant $= \in \mathcal{R}$ avec $a(=) = 2$: $\exists y.x + y = 0 \in \mathcal{F}$.

Interprétations

Définition

Une interprétation (ou structure) $\mathcal{I}$ de Σ est la donnée de :

- un ensemble *non vide* $|\mathcal{I}|$ (la trame de $\mathcal{I}$) ;
- pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}$, une fonction $f_{\mathcal{I}} : |\mathcal{I}|^{a(f)} \to |\mathcal{I}|$;
- pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{R}$, une partie $R_{\mathcal{I}} \subseteq |\mathcal{I}|^{a(R)}$.

N.B. : Quand Σ contient le symbole d'égalité, on exige que $=_{\mathcal{I}} = \{(a, a); a \in |\mathcal{I}|\}$.

Interprétations

Définition

Une interprétation (ou structure) $\mathcal{I}$ de Σ est la donnée de :

- un ensemble *non vide* $|\mathcal{I}|$ (la trame de $\mathcal{I}$) ;
- pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}$, une fonction $f_{\mathcal{I}} : |\mathcal{I}|^{a(f)} \to |\mathcal{I}|$;
- pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{R}$, une partie $R_{\mathcal{I}} \subseteq |\mathcal{I}|^{a(R)}$.

N.B. : Quand Σ contient le symbole d'égalité, on exige que $=_{\mathcal{I}} = \{(a, a); a \in |\mathcal{I}|\}$.

Exemple

Avec $\mathcal{S} = \{+, 0\}$ et $\mathcal{R} = \{=\}$, on peut considérer :

- $|\mathcal{N}| = \mathbf{N}$ avec les opérations usuelles ;
- $|\mathcal{Z}| = \mathbf{Z}$ avec les opérations usuelles ;
- $|\mathcal{Z}_2| = \{0, 1\}$ vu comme $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;
- $|\mathcal{B}| = \{0, 1\}$, avec $+ = \max$;

mais aussi $|\mathcal{I}| = \mathbf{N}$ avec $p +_{\mathcal{I}} q = 3p + 1$ et $0_{\mathcal{I}} = 42$.

Environnements et valeurs

- La valeur $[\![t]\!]_{\mathcal{I}}$ d'un terme t se calcule inductivement :

$$[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{I}} = f_{\mathcal{I}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{I}})$$

Environnements et valeurs

- La valeur $[\![t]\!]_{\mathcal{I}}$ d'un terme t se calcule inductivement :

$$[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{I}} = f_{\mathcal{I}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{I}})$$
$$[\![x]\!]_{\mathcal{I}} = ?$$

Environnements et valeurs

- Un environnement est une fonction $e : \mathcal{V} \to |\mathcal{I}|$.
- La valeur $[\![t]\!]_{\mathcal{I},e}$ d'un terme t dans l'environnement e se calcule inductivement :

$$
\begin{aligned}
[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{I},e} &= f_{\mathcal{I}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{I},e}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{I},e}) \\
[\![x]\!]_{\mathcal{I},e} &= e(x)
\end{aligned}
$$

Environnements et valeurs

- Un environnement est une fonction $e : \mathcal{V} \to |\mathcal{I}|$.
- La valeur $[\![t]\!]_{\mathcal{I},e}$ d'un terme t dans l'environnement e se calcule inductivement :

$$\begin{aligned} [\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{\mathcal{I},e} &= f_{\mathcal{I}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{I},e},\ldots,[\![t_n]\!]_{\mathcal{I},e}) \\ [\![x]\!]_{\mathcal{I},e} &= e(x) \end{aligned}$$

- La valeur d'une formule atomique s'en déduit :

$$[\![R(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{\mathcal{I},e} = \begin{cases} 1 & \text{si } ([\![t_1]\!]_{\mathcal{I},e},\ldots,[\![t_n]\!]_{\mathcal{I},e}) \in R_{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérité en calcul des prédicats

On obtient inductivement une valeur pour toute formule par les tables de vérité et :

$$[\![\forall x.A]\!]_{\mathcal{I},e} = \begin{cases} 1 & \text{si } [\![A]\!]_{\mathcal{I},e[x:=a]} = 1 \text{ pour tout } a \in |\mathcal{I}| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$[\![\exists x.A]\!]_{\mathcal{I},e} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } a \in |\mathcal{I}| \text{ tel que } [\![A]\!]_{\mathcal{I},e[x:=a]} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $e[x := a](y) = a$ si $y = x$ et $e[x := a](y) = e(y)$ sinon.
On note $\mathcal{I}, e \models A$ ssi $[\![A]\!]_{\mathcal{I},e} = 1$: A est valide pour $(\mathcal{I}, e)$.

Vérité en calcul des prédicats

On obtient inductivement une valeur pour toute formule par les tables de vérité et :

$$[\![\forall x.A]\!]_{\mathcal{I},e} = \begin{cases} 1 & \text{si } [\![A]\!]_{\mathcal{I},e[x:=a]} = 1 \text{ pour tout } a \in |\mathcal{I}| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$[\![\exists x.A]\!]_{\mathcal{I},e} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } a \in |\mathcal{I}| \text{ tel que } [\![A]\!]_{\mathcal{I},e[x:=a]} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $e[x := a](y) = a$ si $y = x$ et $e[x := a](y) = e(y)$ sinon.
On note $\mathcal{I}, e \models A$ ssi $[\![A]\!]_{\mathcal{I},e} = 1$: A est valide pour $(\mathcal{I}, e)$.

Exemple (Avec $A = \exists y.x + y = 0$)

- $\mathcal{N}, e \models A$ ssi $e(x) = 0$;
- $\mathcal{Z}, e \models A$ toujours ;
- $\mathcal{Z}_2, e \models A$ toujours ;
- $\mathcal{B}, e \models A$ ssi $e(x) = 0$;
- $\mathcal{I}, e \models A$ ssi $3e(x) + 1 = 42$ (donc jamais).

Vérité et équivalence

- On note $\mathcal{I} \models A$ ssi $\mathcal{I}, e \models A$ pour tout environnement e : $\mathcal{I}$ valide A.
- Une tautologie sur Σ est une formule A valide dans toute interprétation : on note $\models A$.
- On note $A \equiv B$ et on dit que A et B sont équivalentes si : pour toute interprétation $\mathcal{I}$ et tout environnement e, $[\![A]\!]_{\mathcal{I},e} = [\![B]\!]_{\mathcal{I},e}$.

Lemme

$A \equiv B$ ssi $\models A \Leftrightarrow B$.

Démonstration: $[\![A]\!]_{\mathcal{I},e} = [\![B]\!]_{\mathcal{I},e}$ ssi $\mathcal{I}, e \models A \Leftrightarrow B$. $\square$

Quelques vérités et équivalences

Priorités : $\{\forall x., \exists x.\} < \cdots$

$$\neg\forall x.A \equiv \exists x.\neg A \qquad \neg\exists x.A \equiv \forall x.\neg A$$

$$\forall x.A \wedge B \equiv (\forall x.A) \wedge (\forall x.B) \qquad \exists x.A \vee B \equiv (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$$

$$(\forall x.A) \Rightarrow A[x := t] \qquad A[x := t] \Rightarrow (\exists x.A) \qquad (\forall x.A) \Rightarrow (\exists x.A)$$

$$\exists x.\forall y.A[z := x] \Rightarrow A[z := y]$$

$$\ldots$$

où $A[x := t]$ dénote la substitution par le terme t de toutes les occurrences de x

Quelques vérités et équivalences

Priorités : $\{\forall x., \exists x.\} < \cdots$

$$\neg\forall x.A \equiv \exists x.\neg A \qquad \neg\exists x.A \equiv \forall x.\neg A$$

$$\forall x.A \wedge B \equiv (\forall x.A) \wedge (\forall x.B) \qquad \exists x.A \vee B \equiv (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$$

$$(\forall x.A) \Rightarrow A[x := t] \qquad A[x := t] \Rightarrow (\exists x.A) \qquad (\forall x.A) \Rightarrow (\exists x.A)$$

$$\exists x.\forall y.A[z := x] \Rightarrow A[z := y]$$

$$\cdots$$

où $A[x := t]$ dénote la substitution par le terme t de toutes les occurrences de x

$\rightsquigarrow$ Vérifiez.

Substitution

Soit $A = (\exists y. x + y = 0)$:

$$A[x := 0] = (\exists y. 0 + y = 0)$$

$$A[x := z + 0] = (\exists y. (z + 0) + y = 0)$$

$$A[y := 0] = A$$

$$A[x := y] = (\exists y. y + y = 0)$$

Substitution

Soit $A = (\exists y. x + y = 0)$:

$$A[x := 0] = (\exists y. 0 + y = 0)$$

$$A[x := z + 0] = (\exists y. (z + 0) + y = 0)$$

$$A[y := 0] = A \qquad \text{(et pas } \exists y. x + 0 = 0\,!\text{)}$$

$$A[x := y] = (\exists y. y + y = 0)$$

Substitution

Soit $A = (\exists y.x + y = 0)$:

$$A[x := 0] = (\exists y.0 + y = 0)$$

$$A[x := z + 0] = (\exists y.(z + 0) + y = 0)$$

$$A[y := 0] = A \qquad \text{(et pas } \exists y.x + 0 = 0\,!)$$

$$A[x := y] = \cancel{(\exists y.y + y = 0)} \qquad \text{NON !}$$

Substitution

Soit $A = (\exists y.x + y = 0)$:

$$A[x := 0] = (\exists y.0 + y = 0)$$

$$A[x := z + 0] = (\exists y.(z + 0) + y = 0)$$

$$A[y := 0] = A \qquad \text{(et pas } \exists y.x + 0 = 0\,!\text{)}$$

$$A[x := y] = \cancel{(\exists y.y + y = 0)} \qquad \text{NON !}$$

- Les occurrences de x dans A sont liées dans $\forall x.A$ et $\exists x.A$.

  On dit aussi "variable muette", *cf.* $\sum_{i=0}^{n} x^i$, $\int_{x \in I} f(x)dx$, ...

- On considère les formules modulo le renommage des variables liées, *sans confusion* : ici, $A = (\exists y'.x + y' = 0)$.

Substitution

Soit $A = (\exists y. x + y = 0)$:

$$A[x := 0] = (\exists y. 0 + y = 0)$$

$$A[x := z + 0] = (\exists y. (z + 0) + y = 0)$$

$$A[y := 0] = A \qquad \text{(et pas } \exists y. x + 0 = 0\,!\text{)}$$

$$A[x := y] = \cancel{(\exists y. y + y = 0)} \qquad \text{NON !}$$

$$A[x := y] = (\exists y'. y + y' = 0)$$

- Les occurrences de x dans A sont liées dans $\forall x.A$ et $\exists x.A$.

  On dit aussi "variable muette", *cf.* $\sum_{i=0}^{n} x^i$, $\int_{x \in I} f(x)dx$, ...
- On considère les formules modulo le renommage des variables liées, *sans confusion* : ici, $A = (\exists y'. x + y' = 0)$.

Quelques vérités et équivalences

Priorités : $\{\forall x., \exists x.\} < \cdots$

$$\neg\forall x.A \equiv \exists x.\neg A \qquad \neg\exists x.A \equiv \forall x.\neg A$$

$$\forall x.A \wedge B \equiv (\forall x.A) \wedge (\forall x.B) \qquad \exists x.A \vee B \equiv (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$$

$$(\forall x.A) \Rightarrow A[x := t] \qquad A[x := t] \Rightarrow (\exists x.A) \qquad (\forall x.A) \Rightarrow (\exists x.A)$$

$$\exists x.\forall y.A[z := x] \Rightarrow A[z := y]$$

$$\cdots$$

où $A[x := t]$ dénote la substitution par le terme t de toutes les occurrences *libres* de x (quitte à renommer les variables liées pour éviter les confusions).

Substitution

Soit $A = (\exists y. x + y = 0)$:

$$A[x := 0] = (\exists y. 0 + y = 0)$$
$$A[x := z + 0] = (\exists y. (z + 0) + y = 0)$$
$$A[y := 0] = A \qquad \text{(et pas } \exists y. x + 0 = 0\,!)$$
$$A[x := y] = \cancel{(\exists y. y + y = 0)} \qquad \text{NON !}$$
$$A[x := y] = (\exists y'. y + y' = 0)$$

- Les occurrences de x dans A sont liées dans $\forall x. A$ et $\exists x. A$.

  On dit aussi "variable muette", *cf.* $\sum_{i=0}^{n} x^i$, $\int_{x \in I} f(x)dx$, ...
- On considère les formules modulo le renommage des variables liées, *sans confusion* : ici, $A = (\exists y'. x + y' = 0)$.

Lemme

On a $[\![t[x := u]]\!]_{\mathcal{I},e} = [\![t]\!]_{\mathcal{I},e[x := [\![u]\!]_{\mathcal{I},e}]}$ *et* $[\![A[x := u]]\!]_{\mathcal{I},e} = [\![A]\!]_{\mathcal{I},e[x := [\![u]\!]_{\mathcal{I},e}]}$.

Démonstration: Facile, par induction sur les termes et sur les formules. □

Variables libres

- Une occurrence de x qui n'est pas liée dans A est dite libre dans A.
- Si les variables libres de A sont parmi $x_1, \ldots, x_n$, on note parfois $A[x_1, \ldots, x_n]$ pour marquer cette dépendance, et alors $A[t_1, \ldots, t_n] \coloneqq A[x_1 \coloneqq t_1, \ldots, x_n \coloneqq t_n]$.
- On note $\mathrm{VL}(A)$ l'ensemble des variables libres de A.
- Si $\mathrm{VL}(A) = \emptyset$, on dit que A est une formule close.

Lemme

Si $x \notin \mathrm{VL}(A)$ alors $[\![A]\!]_{\mathcal{I},e}$ ne dépend pas de la valeur de e en x.

Démonstration: On montre par induction sur les termes que $[\![t]\!]_{\mathcal{I},e}$ ne dépend que des valeurs de e sur les variables de t. Donc $[\![R(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{I},e}$ ne dépend que des valeurs de e sur $\mathrm{VL}(R)$ (c'est-à-dire les variables des t_i). On conclut par induction sur les formules. $\square$

Convention

Sauf si c'est explicitement écrit, on suppose toujours qu'aucune variable n'apparait à la fois libre et liée dans une formule (et on peut toujours se ramener à ce cas par renommage) : quand on écrit $A \Rightarrow \forall x.B$, on sous-entend que x n'est pas libre dans A.