Théories

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

On connait.

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Parlons-en.

Théories

- Une théorie est un ensemble T de formules closes : les axiomes de T.
- Un modèle de T est une interprétation qui valide les axiomes de T :
  si $A \in T$ alors $\mathcal{I} \models A$. On note alors $\mathcal{I} \models T$.

Théories

- Une théorie est un ensemble T de formules closes : les axiomes de T.
- Un modèle de T est une interprétation qui valide les axiomes de T :
  si $A \in T$ alors $\mathcal{I} \models A$. On note alors $\mathcal{I} \models T$.

Exemple

Avec les symboles du produit $\cdot$ et de l'égalité $=$, on peut écrire les axiomes de la théorie des groupes $T_{groupes}$: associativité, existence d'un neutre, existence des inverses.
Alors un modèle de $T_{groupes}$ est...

Théories

- Une théorie est un ensemble T de formules closes : les axiomes de T.
- Un modèle de T est une interprétation qui valide les axiomes de T : si $A \in T$ alors $\mathcal{I} \models A$. On note alors $\mathcal{I} \models T$.

Exemple

Avec les symboles du produit $\cdot$ et de l'égalité $=$, on peut écrire les axiomes de la théorie des groupes $T_{groupes}$: associativité, existence d'un neutre, existence des inverses.
Alors un modèle de $T_{groupes}$ est... un groupe. Youpi !

Théories

- Une théorie est un ensemble T de formules closes : les axiomes de T.
- Un modèle de T est une interprétation qui valide les axiomes de T : si $A \in T$ alors $\mathcal{I} \models A$. On note alors $\mathcal{I} \models T$.

Exemple

Avec les symboles du produit $\cdot$ et de l'égalité $=$, on peut écrire les axiomes de la théorie des groupes $T_{groupes}$: associativité, existence d'un neutre, existence des inverses.
Alors un modèle de $T_{groupes}$ est… un groupe. Youpi !

- On dit que A est un théorème de T si tout modèle de T valide A : si $\mathcal{I} \models T$ alors $\mathcal{I} \models A$. On note alors $T \models A$.

Exemple

$T_{groupes} \models \forall x.\forall y.\forall z. x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z.$

Cohérence

- On dit qu'une théorie est cohérente si elle admet un modèle.

Lemme

T est cohérente ssi $T \not\models \perp$.

Démonstration: Aucune interprétation ne valide $\perp$. $\square$

Cohérence

- On dit qu'une théorie est cohérente si elle admet un modèle.
- On dit qu'une théorie T est incohérente si $T \models \bot$.

Lemme

T est cohérente ssi $T \not\models \bot$. T est incohérente ssi, pour toute formule A, $T \models A$.

Démonstration: Aucune interprétation ne valide $\bot$. $\square$

Cohérence

- On dit qu'une théorie est cohérente si elle admet un modèle.
- On dit qu'une théorie T est incohérente si $T \models \bot$.

Lemme

T est cohérente ssi $T \not\models \bot$. T est incohérente ssi, pour toute formule A, $T \models A$.

Démonstration: Aucune interprétation ne valide $\bot$. $\square$

On notera souvent T, A au lieu de $T \cup \{A\}$ et T, T' au lieu de $T \cup T'$.

Lemme

On a $T \models A$ ssi $T, \neg A$ est incohérente.

Et donc $T \not\models A$ ssi $T, \neg A$ admet un modèle.

Cohérence

- On dit qu'une théorie est cohérente si elle admet un modèle.
- On dit qu'une théorie T est incohérente si $T \models \bot$.

Lemme

T est cohérente ssi $T \not\models \bot$. T est incohérente ssi, pour toute formule A, $T \models A$.

Démonstration: Aucune interprétation ne valide $\bot$. $\square$

On notera souvent T, A au lieu de $T \cup \{A\}$ et T, T' au lieu de $T \cup T'$.

Lemme

On a $T \models A$ ssi $T, \neg A$ est incohérente.

Et donc $T \not\models A$ ssi $T, \neg A$ admet un modèle.

Exemple

$T_{groupes} \not\models \forall x. \forall y. x \cdot y = y \cdot x$ parce qu'il y a des groupes non abéliens.

Complétude d'une théorie

- On dit qu'une théorie T détermine A si $T \models A$ ou $T \models \neg A$.
- On dit que A est indépendante de T si T ne détermine pas A.
- On dit qu'une théorie est complète si elle est cohérente et qu'elle détermine toutes les formules closes.

Complétude d'une théorie

- On dit qu'une théorie T détermine A si $T \models A$ ou $T \models \neg A$.
- On dit que A est indépendante de T si T ne détermine pas A.
- On dit qu'une théorie est complète si elle est cohérente et qu'elle détermine toutes les formules closes.

Exemple

La théorie des groupes est incomplète parce que la commutativité est indépendante des axiomes des groupes : il y a des groupes abéliens et des groupes non abéliens.

Complétude d'une théorie

- On dit qu'une théorie T détermine A si $T \models A$ ou $T \models \neg A$.
- On dit que A est indépendante de T si T ne détermine pas A.
- On dit qu'une théorie est complète si elle est cohérente et qu'elle détermine toutes les formules closes.

Exemple

La théorie des groupes est incomplète parce que la commutativité est indépendante des axiomes des groupes : il y a des groupes abéliens et des groupes non abéliens.

Si $\mathcal{I}$ est une interprétation de la signature Σ, la théorie de $\mathcal{I}$ est l'ensemble des formules closes vraies dans $\mathcal{I}$: $T_{\mathcal{I}} = \{A \in \mathcal{F}_\Sigma \mid \mathcal{I} \models A\}$.

Lemme

$T_{\mathcal{I}}$ est toujours complète.

Démonstration: On a toujours $\mathcal{I} \models A$ ou $\mathcal{I} \models \neg A$ (et $\mathcal{I} \models T_{\mathcal{I}}$). $\square$

Deux théorèmes

Théorème (Compacité)

Une théorie T est cohérente ssi toute partie finie de T est cohérente.

Théorème (Löwenheim–Skolem)

Si le langage de T est dénombrable et T est cohérente alors T admet un modèle dont la trame est finie ou dénombrable.

Deux théorèmes

Théorème (Compacité)

Une théorie T est cohérente ssi toute partie finie de T est cohérente.

Théorème (Löwenheim–Skolem)

Si le langage de T est dénombrable et T est cohérente alors T admet un modèle dont la trame est finie ou dénombrable.

Étonnant non ?

Deux théorèmes

Théorème (Compacité)

Une théorie T est cohérente ssi toute partie finie de T est cohérente.

Théorème (Löwenheim–Skolem)

Si le langage de T est dénombrable et T est cohérente alors T admet un modèle dont la trame est finie ou dénombrable.

Étonnant non ?
Les deux se déduiront du théorème de complétude et de sa preuve.

Deux théorèmes

Théorème (Compacité)

Une théorie T est cohérente ssi toute partie finie de T est cohérente.

Théorème (Löwenheim–Skolem)

Si le langage de T est dénombrable et T est cohérente alors T admet un modèle dont la trame est finie ou dénombrable.

Étonnant non ?
Les deux se déduiront du théorème de complétude et de sa preuve.

$\rightsquigarrow$ Exercices.