Cours/TD: un peu de théorie des modèles

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2022–2023

1 Löwenheim–Skolem ascendant

On va montrer que si une théorie admet un modèle infini, alors elle admet un modèle de cardinal arbitrairement grand.

Exercice 1. Soit $\mathcal{T}$ une théorie sur la signature Σ, $\mathcal{M}$ un modèle infini de $\mathcal{T}$ et E un ensemble quelconque. On note Σ_E la signature obtenue à partir de Σ en ajoutant un symbole de constante c_e pour chaque $e \in E$, et $\mathcal{T}_E$ la théorie obtenue à partir de $\mathcal{T}$ en ajoutant l'axiome $c_e \neq c_f$ pour tous $e \neq f \in E$.

1. Montrez que $\mathcal{T}_E$ est cohérente.

2. Déduisez-en que $\mathcal{T}$ admet un modèle $\mathcal{M}_E$ tel que E s'injecte dans $|\mathcal{M}_E|$.

2 Morphismes

Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux interprétations de la signature Σ. Un Σ-*morphisme* de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{J}$ est une fonction $\phi : |\mathcal{I}| \to |\mathcal{J}|$ telle que :

— Pour chaque symbole de fonction n-aire f et pour $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{I}|$ on a $\phi(f_{\mathcal{I}}(a_1, \dots, a_n)) = f_{\mathcal{J}}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n))$.

— Pour chaque symbole de relation n-aire R (sauf $=$) et pour $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{I}|$ on a $(a_1, \dots, a_n) \in R_{\mathcal{I}}$ ssi $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)) \in R_{\mathcal{J}}$.[1]

On note alors $\phi : \mathcal{I} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{J}$.

Exercice 2. On se donne la signature Σ_{grp} et la théorie $\mathcal{G}$ de la feuille d'exercice précédente. Soient H et K deux modèles de $\mathcal{G}$ et $\phi : |H| \to |K|$ telle que, pour tous $a, b \in |H|$, $\phi(a \cdot_H b) = \phi(a) \cdot_K \phi(b)$. Montrez que $\phi : H \xrightarrow{\Sigma_{grp}} K$.

Exercice 3. Montrez (sur une signature quelconque) que la composition de deux morphismes est un morphisme.

Exercice 4. Montrez que si $\phi : \mathcal{I} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{J}$ alors, pour tout environnement $e : \mathcal{V} \to |\mathcal{I}|$, et pour tout terme t sur Σ, on a $\phi([\![t]\!]_{\mathcal{I},e}) = [\![t]\!]_{\mathcal{J},\phi\circ e}$.

3 Structures isomorphes

Un Σ-*isomorphisme* est un Σ-morphisme bijectif.

1. On exclut $=$ sinon tous les morphismes sont injectifs.

Exercice 5. Avec une constante c, une opération binaire m et une relation binaire R en plus de l'égalité, vérifiez que les structures :

— $|\mathcal{I}| = \mathbf{R}$, $c_{\mathcal{I}} = 0$, $m_{\mathcal{I}}(a,b) = a + b$ et $aR_{\mathcal{I}}b$ ssi $a \leq b$;

— $|\mathcal{J}| =]0, +\infty[$, $c_{\mathcal{J}} = 1$, $m_{\mathcal{J}}(a,b) = a \times b$ et $aR_{\mathcal{J}}b$ ssi $a \leq b$;

sont isomorphes.

Exercice 6. Montrez que la composition de deux isomorphismes est un isomorphisme, et que l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Exercice 7. Soit $\phi : \mathcal{I} \overset{\Sigma}{\to} \mathcal{J}$ un Σ-isomorphisme.

1. Montrez que pour tout environnement $e : \mathcal{V} \to |\mathcal{I}|$, et pour toute formule A sur Σ, on a $\mathcal{I}, e \models A$ ssi $\mathcal{J}, \phi \circ e \models A$.

2. Déduisez-en que deux structures isomorphes valident les mêmes formules closes : elles ont la même théorie.

4 Modèles finis

Exercice 8. Soit $\mathcal{T}$ une théorie dont les modèles sont deux-à-deux isomorphes. Montrez que tous les modèles de $\mathcal{T}$ sont finis et de même cardinal.

Exercice 9. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation finie de Σ (contenant au moins le symbole d'égalité). Montrez que tous les modèles de la théorie de $\mathcal{I}$ sont isomorphes à $\mathcal{I}$.