Arithmétique de Peano

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Opérations de base et récurrence sur les entiers naturels.

Arithmétique élémentaire

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St \coloneqq S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x.\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x.\ x = 0 \lor \exists y. x = Sy \\
(A_3) & \forall x. \forall y.\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x.\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x. \forall y.\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x.\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x.\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

C'est l'arithmétique élémentaire $\mathcal{P}_0 \coloneqq \{A_1, \ldots, A_7\}$.

Arithmétique élémentaire

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St \coloneqq S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$\begin{array}{lc}
(A_1) & \forall x.\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x.\ x = 0 \vee \exists y. x = Sy \\
(A_3) & \forall x. \forall y.\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x.\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x. \forall y.\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x.\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x.\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}$$

C'est l'arithmétique élémentaire $\mathcal{P}_0 \coloneqq \{A_1, \ldots, A_7\}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, on identifie n avec $S^n 0$.

Arithmétique élémentaire

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x.\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x.\ x = 0 \vee \exists y. x = Sy \\
(A_3) & \forall x. \forall y.\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x.\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x. \forall y.\ x + Sy = S(x+y) \\
(A_6) & \forall x.\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x.\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

C'est l'arithmétique élémentaire $\mathcal{P}_0 := \{A_1, \ldots, A_7\}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, on identifie n avec $S^n 0$.

Exemple

Avec ça on montre $(1+2) \times 3 = 9$

Arithmétique élémentaire

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x.\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x.\ x = 0 \vee \exists y. x = Sy \\
(A_3) & \forall x. \forall y.\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x.\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x. \forall y.\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x.\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x.\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

C'est l'arithmétique élémentaire $\mathcal{P}_0 := \{A_1, \ldots, A_7\}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, on identifie n avec $S^n 0$.

Exemple

Avec ça on montre $(1 + 2) \times 3 = 9 = 3 + 2 \times 3$

Arithmétique élémentaire

Symboles de fonctions : 0 (constante), S (unaire, $St := S(t)$), $+$ et $\times$ (binaires).

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \forall x.\ 0 \neq Sx \\
(A_2) & \forall x.\ x = 0 \vee \exists y. x = Sy \\
(A_3) & \forall x. \forall y.\ Sx = Sy \Rightarrow x = y \\
(A_4) & \forall x.\ x + 0 = x \\
(A_5) & \forall x. \forall y.\ x + Sy = S(x + y) \\
(A_6) & \forall x.\ x \times 0 = 0 \\
(A_7) & \forall x.\ x \times Sy = x + x \times y
\end{array}
$$

C'est l'arithmétique élémentaire $\mathcal{P}_0 := \{A_1, \ldots, A_7\}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, on identifie n avec S^n0.

Exemple

Avec ça on montre $(1 + 2) \times 3 = 9 = 3 + 2 \times 3$ mais pas $\forall x. \forall y. (1 + x) \times y = y + x \times y$.

Arithmétique de Peano

On ajoute tous les axiomes $Rec_{A[\vec{y},x]}$ du *schéma de récurrence* :

$$\forall \vec{y}. A[x := 0] \Rightarrow \big(\forall z. A[x := z] \Rightarrow A[x := Sz]\big) \Rightarrow \forall x. A$$

(avec $z \notin \mathsf{VL}(A) \subseteq \vec{y}, x$).

On obtient l'arithmétique de Peano $\mathcal{P} := \mathcal{P}_0 \cup \{Rec_{A[\vec{y},x]} \mid \mathsf{VL}(A) \subseteq \vec{y}, x\}$.

Cette théorie est cohérente : $\mathbf{N} \models \mathcal{P}$.

Exemple : 0 est neutre à gauche aussi

Théorème

On a $\mathcal{P} \models \forall x.\ 0 + x = x$.

Démonstration: On pose $A = (0 + x = x)$. Soit $\mathcal{N} \models \mathcal{P}$. Fixons $e : \mathcal{V} \mapsto |\mathcal{N}|$. On a :

- $\mathcal{N}, e \models A_4$ donc $\mathcal{N}, e[x := [\![0]\!]_{\mathcal{N}}] \models x + 0 = x$ donc $\mathcal{N}, e \models 0 + 0 = 0$, donc $\mathcal{N}, e \models A[x := 0]$,
- pour tout $n \in |\mathcal{N}|$, si $\mathcal{N}, e[z := n] \models 0 + z = z$ alors :
  - $\mathcal{N}, e[z := n] \models S(0 + z) = Sz$ par application de S ;
  - de plus $\mathcal{N}, e[z := n] \models A_5$ donc $\mathcal{N}, e[z := n] \models S(0 + z) = 0 + Sz$;

  donc $\mathcal{N}, e[z := n] \models 0 + z = z \Rightarrow 0 + Sz = Sz$,
  c'est-à-dire $\mathcal{N}, e[z := n] \models A[x := z] \Rightarrow A[x := Sz]$,
  donc $\mathcal{N}, e \models \forall z. A[x := z] \Rightarrow A[x := Sz]$,
- on a $\mathcal{N} \models Rec_{A[x]}$ et donc $\mathcal{N} \models \forall x. A$.

$\square$

Exemple : 0 est neutre à gauche aussi

Théorème

On a $\mathcal{P} \models \forall x.\ 0 + x = x$.

À l'avenir, on écrira plutôt :

Démonstration: Soit $A[x] = (0 + x = x)$, on démontre $\mathcal{P} \models \forall x.A$ par récurrence.

- Initialisation : on a $\mathcal{P} \models A[0]$ c'est-à-dire $\mathcal{P} \models 0 + 0 = 0$ par (A_4).
- Hérédité : supposons $\mathcal{P} \models A[n]$, c'est-à-dire $\mathcal{P} \models 0 + n = n$, et donc $\mathcal{P} \models S(0 + n) = Sn$ en appliquant S. On a aussi $\mathcal{P} \models S(0 + n) = 0 + Sn$ par (A_5), et donc $\mathcal{P} \models A[n + 1]$.

$\square$

Exemple : 0 est neutre à gauche aussi

Théorème

On a $\mathcal{P} \models \forall x.\ 0 + x = x$.

Voire :

Démonstration: On montre $0 + x = x$ par récurrence sur x :

- on a $0 + 0 = 0$ par (A_4) ;
- si $0 + n = n$ on obtient :

$$\begin{array}{rcll} 0 + Sn & = & S(0 + n) & \text{par } (A_5) \\ & = & S(n) & \text{par hypothèse, en appliquant } S \end{array}$$

et donc $0 + Sn = Sn$.

$\square$

Exemple : 0 est neutre à gauche aussi

Théorème

On a $\mathcal{P} \models \forall x.\ 0 + x = x$.

Voire :

Démonstration: On montre $0 + x = x$ par récurrence sur x :

- on a $0 + 0 = 0$ par (A_4) ;
- si $0 + n = n$ on obtient :

$$\begin{array}{rcll} 0 + Sn & = & S(0+n) & \text{par } (A_5) \\ & = & S(n) & \text{par hypothèse, en appliquant } S \end{array}$$

  et donc $0 + Sn = Sn$.

$\square$

⇝ Exercices