Déduction naturelle propositionnelle

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Teaser

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Théorème (Incomplétude)

Il n'y a pas de théorie :

- *contenant suffisamment d'arithmétique,*
- *complète,*
- *cohérente,*
- *récursivement énumérable.*

Parlons-en.

Démonstrations à la Hilbert

Il y a bien longtemps...

Une démonstration, c'est *une suite finie de formules dont chacune est soit un axiome, soit une conséquence immédiate des formules précédentes en vertu d'une règle d'inférence.*

Démonstrations à la Hilbert

Il y a bien longtemps...

Une démonstration, c'est *une suite finie de formules dont chacune est soit un axiome, soit une conséquence immédiate des formules précédentes en vertu d'une règle d'inférence.*

Mais on perd toute la structure.

Un exemple

Théorème 6.24 (L'égalité de Bézout) *Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Alors il existe un couple $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que*

$$\mathrm{pgcd}(m,n) = um + vn.$$

En utilisant la notation $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} := \{um + vn |\ (u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$, le théorème 6.24 s'écrit :

$$\mathrm{pgcd}(m,n) \in m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}\,.$$

Démonstration: Posons

$$\mathcal{E} := \{k \in \mathbb{N}^* |\ \exists (u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ telle que } k = um + vn\} = (m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}^*\,.$$

Remarquer que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}^*$ (pourquoi ?). D'après le théorème 5.7 il en résulte que le minimum $\delta := \min(\mathcal{E})$ existe. Puisque $\delta \in \mathcal{E}$ on a

$$\delta = u_\delta m + v_\delta n$$

avec $(u_\delta, v_\delta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $\delta = \mathrm{pgcd}(m,n)$. Il suffit de démontrer que

(a) δ est un diviseur commun de m et n.

(b) Tout diviseur commun de m et n est un diviseur de δ.

Pour démontrer (a) appliquons le théorème de division euclidienne (théorème 3.5) aux couples (δ, m) et (δ, n). On obtient

$$m = q\delta + r,\ \ n = q'\delta + r'\,,$$

où $(q,q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $0 \le r < \delta$, $0 \le r' < \delta$. Nous allons montrer (par l'absurde) que $r = r' = 0$. En effet, supposons par exemple $r > 0$. Alors

$$\mathbb{N}^* \ni r = m - q\delta = m - q(u_\delta m + v_\delta n) = (1 - qu_\delta)m + (-qv_\delta)n\,,$$

qui, évidemment, est un élément de $\mathcal{E}$. Mais on a $r < \delta$, ce qui contredit la définition de δ (le minimum de l'ensemble $\mathcal{E}$). Il en résulte $r = 0$. Un argument similaire donne $r' = 0$. Donc $r = r' = 0$, ce qui implique évidemment $\delta | m$ et $\delta | n$.

Pour démontrer (b) soit $d \in \mathbb{Z}^*$ diviseur commun de m et n. Alors $d | u_\delta m$ et $d | v_\delta n$, donc $d | (u_\delta m + v_\delta n) = \delta$.

■

La déduction

On démontre une formule A dans un certain contexte $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ rassemblant les hypothèses faites jusque là.
On note $\Gamma \vdash A$ l'énoncé : *en supposant $A_1, \ldots, A_n$, on déduit A.*
On appelle ça un séquent.

Définition

Une règle de déduction (R) est la donnée d'une suite finie de séquents hypothèses $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ et d'un séquent de conclusion $\Gamma \vdash A$. On note :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

Une instance de (R) est obtenue en substituant des formules aux variables propositionnelles de (R).

Comment lire une règle ?

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}\ (R)$$

De haut en bas : « rédaction. »

si on a établi les hypothèses, on en déduit la conclusion

De bas en haut : « recherche. »

pour prouver la conclusion, il suffit d'établir les hypothèses

Par exemple :

$$\frac{A \vdash B}{\vdash A \Rightarrow B}\ \text{(implication)} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ \text{(hyp. inutile)} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \text{(vrai/faux)} \qquad \cdots$$

Mais aussi :

$$\frac{A, B \vdash A}{B \vdash A}\ \text{(méthode de L1)}$$

Correction d'une règle de déduction

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A} \ (R)$$

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ est valide (on note $A_1, \ldots, A_n \models A$) si :
pour toute interprétation $\mathcal{I}$ et tout environnement e, tels que $\mathcal{I}, e \models A_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\mathcal{I}, e \models A$ (autrement dit si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow A$ est une tautologie).

Définition

La règle (R) est correcte si $\Gamma \models A$ dès que $\Gamma_i \models A_i$ pour $i = 1, \ldots, n$
(autrement dit si la déduction préserve les tautologies).

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à des règles correctes.

Déduction naturelle propositionnelle : règles d'introduction

Comment prouve-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \ (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \ (\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \ (\vee_{id})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle propositionnelle : règles d'introduction

Comment prouve-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{ig}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_{id})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top_i)$$

Un premier exemple

$$\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B$$

Un premier exemple

$$\frac{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)$$

Un premier exemple

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A \wedge B}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)$$

Un premier exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A \qquad A, B \vdash B}{A, B \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i)}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle propositionnelle : l'axiome

On peut s'arrêter dès que la conclusion fait partie des hypothèses.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax)$$

Un premier exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,(ax) \quad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,(ax)}{A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\,(\Rightarrow_i)$$

Un peu plus compliqué

$$\frac{A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{\vdash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle propositionnelle : règles d'élimination

Comment utilise-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_{ed})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

Déduction naturelle propositionnelle : règles d'élimination

Comment utilise-t-on une conjonction ? une disjonction ? une implication ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_{eg}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_{ed})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_e)$$

Un peu plus compliqué

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,(ax)}{F \vdash B \vee C}\,(\wedge_{ed}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, B \vdash F}\,(ax)}{F, B \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \qquad \dfrac{}{F, B \vdash B}\,(ax)}{F, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{F, B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{ig}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, C \vdash F}\,(ax)}{F, C \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \qquad \dfrac{}{F, C \vdash C}\,(ax)}{F, C \vdash A \wedge C}\,(\wedge_i)}{F, C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{id})}{F := A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_e)}{\vdash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\Rightarrow_i)$$

Un peu plus compliqué

$$\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,(ax)}{F \vdash B \vee C}\,(\wedge_{ed}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, B \vdash F}\,(ax)}{F, B \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \qquad \dfrac{}{F, B \vdash B}\,(ax)}{F, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i)}{F, B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{ig}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, C \vdash F}\,(ax)}{F, C \vdash A}\,(\wedge_{eg}) \qquad \dfrac{}{F, C \vdash C}\,(ax)}{F, C \vdash A \wedge C}\,(\wedge_i)}{F, C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\vee_{id})$$

$$\dfrac{F \coloneqq A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{\vdash A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,(\Rightarrow_i)\,(\vee_e)$$

$\rightsquigarrow$ S'exercer : questions 1 à 5 de l'exercice 1

Avec la négation

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \qquad \neg(A \vee B) \vdash \neg B}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}\ (\wedge_i)}{\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle propositionnelle : la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$$

Avec la négation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)}\,(ax) \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg(A \vee B), A \vdash A}\,(ax)}{\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B}\,(\vee_{ig})}{\neg(A \vee B), A \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A}\,(\neg_i) \quad \dfrac{\vdots}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}\,(\neg_i)}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}\,(\wedge_i)}{\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}\,(\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle propositionnelle : la négation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$$

Négation et contradiction : $\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\Rightarrow_e)$$

Toujours la négation

$$\frac{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B} \ (\Rightarrow_i)$$

Toujours la négation

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}\ (\vee_{ig})}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\ (\Rightarrow_i)$$

Déduction naturelle propositionnelle : raisonner sur la vérité

Tiers exclu :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

Toujours la négation

$$\dfrac{\dfrac{H, \neg A \vdash \neg A \vee \neg B \qquad H, A \vdash \neg A \vee \neg B}{H \coloneqq \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}\ (t.e.)}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\ (\Rightarrow_i)$$

Toujours la négation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{H, A, B \vdash A}\,(ax) \quad \dfrac{}{H, A, B \vdash B}\,(ax)}{H, A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i) \quad \dfrac{}{H, A, B \vdash \neg(A \wedge B)}\,(ax)}{H, A, B \vdash \bot}\,(\neg_e)}{H, A \vdash \neg B}\,(\neg_i)}{H, A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{id}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{H, \neg A \vdash \neg A}\,(ax)}{H, \neg A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{ig})$$

$$\dfrac{}{(t.e.)}$$

$$\dfrac{H \coloneqq \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\,(\Rightarrow_i)$$

Toujours la négation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{H, A, B \vdash A}\,(ax) \quad \dfrac{}{H, A, B \vdash B}\,(ax)}{H, A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge_i) \quad \dfrac{}{H, A, B \vdash \neg(A \wedge B)}\,(ax)}{H, A, B \vdash \bot}\,(\neg_e)}{H, A \vdash \neg B}\,(\neg_i)}{H, A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{id}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{H, \neg A \vdash \neg A}\,(ax)}{H, \neg A \vdash \neg A \vee \neg B}\,(\vee_{ig})$$

$$\dfrac{H \coloneqq \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}{\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B}\,(\Rightarrow_i)$$

$\rightsquigarrow$ S'exercer : questions 6 à 8 de l'exercice 1, et exercice 2

Déduction naturelle propositionnelle : bureaucratie

Affaiblissement (on peut oublier une hypothèse) :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (aff)$$

Contraction (on peut utiliser une hypothèse plusieurs fois) :

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (cont)$$

Échange (l'ordre des hypothèses ne compte pas) :

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash C}\ (ech)$$

On verra que les deux premières sont facultatives