Déduction naturelle: calcul des prédicats

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Définition

On note *DN* le système de la déduction naturelle pour la logique classique du premier ordre, constitué :

- des règles déjà vues pour le calcul propositionnel ;
  - axiome (ax) ;
  - introduction et élimination pour les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\top$ et $\bot$;
  - règles *structurelles* d'affaiblissement (aff), contraction ($cont$) et échange (ech) ;

Déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Définition

On note *DN* le système de la déduction naturelle pour la logique classique du premier ordre, constitué :

- des règles déjà vues pour le calcul propositionnel ;
  - axiome (ax) ;
  - introduction et élimination pour les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\top$ et $\bot$;
  - règles *structurelles* d'affaiblissement (aff), contraction $(cont)$ et échange (ech) ;
- des règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs $\forall$ et $\exists$;

Quantification universelle

Introduction : on montre $\forall x.A$, en montrant A pour un x quelconque.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.A}\ (\forall_i)$$

Quantification universelle

Introduction : on montre $\forall x.A$, en montrant A pour un x quelconque.

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad (x \notin \mathrm{VL}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \forall x.A} \ (\forall_i)$$

Attention

On ne doit faire aucune hypothèse sur x : il faut choisir une variable *fraîche*.

Quantification universelle

Introduction : on montre $\forall x.A$, en montrant A pour un x quelconque.

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad (x \notin \mathsf{VL}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \forall x.A}\ (\forall_i)$$

Attention

On ne doit faire aucune hypothèse sur x : il faut choisir une variable *fraîche*.

Élimination : si on a $\forall x.A$, on en déduit A pour n'importe quelle valeur de x.

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

Quantification universelle

Introduction : on montre $\forall x.A$, en montrant A pour un x quelconque.

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad (x \notin \mathsf{VL}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \forall x.A}\ (\forall_i)$$

Attention

On ne doit faire aucune hypothèse sur x : il faut choisir une variable *fraîche*.

Élimination : si on a $\forall x.A$, on en déduit A pour n'importe quelle valeur de x.

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

Attention

On ne fait pas référence à un élément d'une interprétation particulière : t est un terme !

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

Avec un symbole de relation binaire $<$, en notant

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \qquad I \equiv \forall x.\neg x < x \qquad A \equiv \forall x.\forall y.\neg(x < y \wedge y < x)$$

$$\vdash T \Rightarrow I \Rightarrow A$$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

Avec un symbole de relation binaire $<$, en notant

$$T \equiv \forall x. \forall y. \forall z. x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \qquad I \equiv \forall x. \neg x < x \qquad A \equiv \forall x. \forall y. \neg (x < y \wedge y < x)$$

$$\dfrac{\dfrac{T, I \vdash A}{T \vdash I \Rightarrow A}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash T \Rightarrow I \Rightarrow A}\ (\Rightarrow_i)$$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

Avec un symbole de relation binaire $<$, en notant

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \qquad I \equiv \forall x.\neg x < x \qquad A \equiv \forall x.\forall y.\neg(x < y \land y < x)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{T, I \vdash \forall y.\neg(x < y \land y < x)}{T, I \vdash A}\ (\forall_i)}{T \vdash I \Rightarrow A}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash T \Rightarrow I \Rightarrow A}\ (\Rightarrow_i)$$

$\mathrm{VL}(T, I) = \emptyset$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

Avec un symbole de relation binaire $<$, en notant

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \qquad I \equiv \forall x.\neg x < x \qquad A \equiv \forall x.\forall y.\neg(x < y \wedge y < x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T, I \vdash \neg(x < y \wedge y < x)}{T, I \vdash \forall y.\neg(x < y \wedge y < x)}\,(\forall_i)}{T, I \vdash A}\,(\forall_i)}{T \vdash I \Rightarrow A}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash T \Rightarrow I \Rightarrow A}\,(\Rightarrow_i)$$

$\mathrm{VL}(T, I) = \emptyset$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

Avec un symbole de relation binaire $<$, en notant

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \qquad I \equiv \forall x.\neg x < x \qquad A \equiv \forall x.\forall y.\neg(x < y \wedge y < x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \equiv T, I, x < y \wedge y < x \vdash \bot}{T, I \vdash \neg(x < y \wedge y < x)}\,(\neg_i)}{T, I \vdash \forall y.\neg(x < y \wedge y < x)}\,(\forall_i)}{T, I \vdash A}\,(\forall_i)}{T \vdash I \Rightarrow A}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash T \Rightarrow I \Rightarrow A}\,(\Rightarrow_i)$$

$\mathrm{VL}(T, I) = \emptyset$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

Avec un symbole de relation binaire $<$, en notant

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z \qquad I \equiv \forall x.\neg x < x \qquad A \equiv \forall x.\forall y.\neg(x < y \wedge y < x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\neg x < x}\,(ax)}{\Gamma \vdash \neg x < x}\,(\forall_e) \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vdash x < x\end{array}}{\Gamma \equiv T, I, x < y \wedge y < x \vdash \bot}\,(\neg_e)}{T, I \vdash \neg(x < y \wedge y < x)}\,(\neg_i)}{T, I \vdash \forall y.\neg(x < y \wedge y < x)}\,(\forall_i)}{T, I \vdash A}\,(\forall_i)}{T \vdash I \Rightarrow A}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash T \Rightarrow I \Rightarrow A}\,(\Rightarrow_i)$$

$\mathrm{VL}(T, I) = \emptyset$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

$$\Gamma \equiv T, I, x < y \wedge y < x \vdash x < x$$

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z$$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x < y \Rightarrow y < x \Rightarrow x < x \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x < y \wedge y < x}\,(ax)}{\Gamma \vdash x < y}\,(\wedge_{eg})}{\Gamma \vdash y < x \Rightarrow x < x}\,(\Rightarrow_e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x < y \wedge y < x}\,(ax)}{\Gamma \vdash y < x}\,(\wedge_{ed})}{\Gamma \equiv T, I, x < y \wedge y < x \vdash x < x}\,(\Rightarrow_e)$$

$$T \equiv \forall x. \forall y. \forall z. x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z$$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Gamma \vdash \forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z}{\Gamma \vdash (x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)[z := x]}\;(\forall_e) \\ \equiv \\ \Gamma \vdash x < y \Rightarrow y < x \Rightarrow x < x\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x < y \wedge y < x}\;(ax)}{\Gamma \vdash x < y}\;(\wedge_{eg})}{\Gamma \vdash y < x \Rightarrow x < x}\;(\Rightarrow_e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x < y \wedge y < x}\;(ax)}{\Gamma \vdash y < x}\;(\wedge_{ed})}{\Gamma \equiv T, I, x < y \wedge y < x \vdash x < x}\;(\Rightarrow_e)$$

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z$$

Exemple : transitivité + irréflexivité → antisymétrie

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z}\,(ax)
}{
\begin{array}{c}
\Gamma \vdash (\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)[x := x] \\
\equiv \\
\Gamma \vdash \forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z
\end{array}
}\,(\forall_e)
}{
\begin{array}{c}
\Gamma \vdash (\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)[y := y] \\
\equiv \\
\Gamma \vdash \forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z
\end{array}
}\,(\forall_e)
}{
\begin{array}{c}
\Gamma \vdash (x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z)[z := x] \\
\equiv \\
\Gamma \vdash x < y \Rightarrow y < x \Rightarrow x < x
\end{array}
}\,(\forall_e)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash x < y \wedge y < x}\,(ax)
}{\Gamma \vdash x < y}\,(\wedge_{eg})
}{\Gamma \vdash y < x \Rightarrow x < x}\,(\Rightarrow_e)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash x < y \wedge y < x}\,(ax)
}{\Gamma \vdash y < x}\,(\wedge_{ed})
}{\Gamma \equiv T, I, x < y \wedge y < x \vdash x < x}\,(\Rightarrow_e)
$$

$$T \equiv \forall x.\forall y.\forall z.x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z$$

Exemple : une propriété « purement logique »

$$\vdash (\forall x.A \wedge B) \Rightarrow (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)$$

Exemple : une propriété « purement logique »

$$\dfrac{\dfrac{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.A \qquad\qquad \forall x.A \wedge B \vdash \forall x.B}{\forall x.A \wedge B \vdash (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\ (\wedge_i)}{\vdash (\forall x.A \wedge B) \Rightarrow (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\ (\Rightarrow_i)$$

Exemple : une propriété « purement logique »

$$\dfrac{\dfrac{\forall x.A \wedge B \vdash A}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.A}\,(\forall_i) \qquad \dfrac{\forall x.A \wedge B \vdash B}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.B}\,(\forall_i)}{\dfrac{\forall x.A \wedge B \vdash (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}{\vdash (\forall x.A \wedge B) \Rightarrow (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\,(\Rightarrow_i)}\,(\wedge_i)$$

$$x \notin \mathrm{VL}(\forall x.A \wedge B)$$

Exemple : une propriété « purement logique »

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.A \wedge B \vdash A \wedge B}{\forall x.A \wedge B \vdash A}\,(\wedge_{eg})}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.A}\,(\forall_i) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x.A \wedge B \vdash A \wedge B}{\forall x.A \wedge B \vdash B}\,(\wedge_{ed})}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.B}\,(\forall_i)}{\forall x.A \wedge B \vdash (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\,(\wedge_i)}{\vdash (\forall x.A \wedge B) \Rightarrow (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\,(\Rightarrow_i)$$

$$x \notin \mathrm{VL}(\forall x.A \wedge B)$$

Exemple : une propriété « purement logique »

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.A \wedge B}\,(ax)}{\forall x.A \wedge B \vdash A \wedge B}\,(\forall_e)}{\forall x.A \wedge B \vdash A}\,(\wedge_{eg})}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.A}\,(\forall_i) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.A \wedge B}\,(ax)}{\forall x.A \wedge B \vdash A \wedge B}\,(\forall_e)}{\forall x.A \wedge B \vdash B}\,(\wedge_{ed})}{\forall x.A \wedge B \vdash \forall x.B}\,(\forall_i)}{\forall x.A \wedge B \vdash (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\,(\wedge_i)}{\vdash (\forall x.A \wedge B) \Rightarrow (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)}\,(\Rightarrow_i)$$

$x \notin \mathrm{VL}(\forall x.A \wedge B)$

Quantification existentielle

Introduction : on montre $\exists x.A$, en fournissant une valeur de x qui convient.

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.A}\ (\exists_i)$$

Attention

On ne fait pas référence à un élément d'une interprétation particulière : t est un terme !

Quantification existentielle

Introduction : on montre $\exists x.A$, en fournissant une valeur de x qui convient.

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x.A}\ (\exists_i)$$

Attention

On ne fait pas référence à un élément d'une interprétation particulière : t est un terme !

Élimination : pour utiliser un résultat de la forme $\exists x.A$, il faut savoir utiliser l'hypothèse A, sans dépendre de la valeur de x pour laquelle A est vérifiée.

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.A \qquad \Gamma, A \vdash B \quad {\scriptstyle (x \notin \mathrm{VL}(\Gamma) \cup \mathrm{VL}(B))}}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

Attention

On ne doit faire aucune autre hypothèse sur x : il faut choisir une variable *fraîche*.

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\vdash \forall x.(\exists y.x = SSy) \rightarrow (\exists y.x = Sy)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\dfrac{\dfrac{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = Sy}{\vdash (\exists y.x = SSy) \to (\exists y.x = Sy)}\ (\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x.(\exists y.x = SSy) \to (\exists y.x = Sy)}\ (\forall_i)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = SSy}\;(ax) \qquad \exists y.x = SSy, x = SSy \vdash \exists y.x = Sy}{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = Sy}\;(\exists_e)}{\vdash (\exists y.x = SSy) \to (\exists y.x = Sy)}\;(\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x.(\exists y.x = SSy) \to (\exists y.x = Sy)}\;(\forall_i)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = SSy}\,(ax) \qquad \begin{array}{c}\exists y'.x = SSy', x = SSy \vdash \exists z.x = Sz \\ \equiv \\ \exists y.x = SSy, x = SSy \vdash \exists y.x = Sy\end{array}}{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = Sy}\,(\exists_e)}{\vdash (\exists y.x = SSy) \to (\exists y.x = Sy)}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x.(\exists y.x = SSy) \to (\exists y.x = Sy)}\,(\forall_i)$$

Exemple : tout successeur d'un successeur est un successeur.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = SSy}\,(ax) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{}{\exists y.x = SSy, x = SSy \vdash x = SSy}\,(ax) \\ \equiv \\ \exists y.x = SSy, x = SSy \vdash (x = Sz)[z := Sy] \end{array}}{\exists y'.x = SSy', x = SSy \vdash \exists z.x = Sz}\,(\exists_i) \\ \equiv \\ \exists y.x = SSy, x = SSy \vdash \exists y.x = Sy \end{array}}{\exists y.x = SSy \vdash \exists y.x = Sy}\,(\exists_e)}{\vdash (\exists y.x = SSy) \rightarrow (\exists y.x = Sy)}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash \forall x.(\exists y.x = SSy) \rightarrow (\exists y.x = Sy)}\,(\forall_i)$$

Exemple : une loi de De Morgan

$$\neg \forall x. A \vdash \exists x. \neg A$$

Exemple : une loi de De Morgan

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \equiv \neg\forall x.A, \neg\exists x.\neg A \vdash \exists x.\neg A}\,(\bot_e) \qquad \dfrac{}{\neg\forall x.A, \exists x.\neg A \vdash \exists x.\neg A}\,(ax)}{\neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A}\,(t.e.)$$

Exemple : une loi de De Morgan

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\forall x.A}\,(ax) \qquad \Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\Gamma \equiv \neg\forall x.A, \neg\exists x.\neg A \vdash \exists x.\neg A}\,(\bot_e) \qquad \dfrac{}{\neg\forall x.A, \exists x.\neg A \vdash \exists x.\neg A}\,(ax)}{\neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A}\,(t.e.)$$

Exemple : une loi de De Morgan

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\forall x.A}\;(ax) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma, \neg A \vdash A}\;(\bot_e) \qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\;(ax)}{\Gamma \vdash A}\;(t.e.)}{\Gamma \vdash \forall x.A}\;(\forall_i)}{\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \equiv \neg\forall x.A, \neg\exists x.\neg A \vdash \exists x.\neg A}\;(\bot_e)}\;(\neg_e) \qquad \dfrac{}{\neg\forall x.A, \exists x.\neg A \vdash \exists x.\neg A}\;(ax)}{\neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A}\;(t.e.)$$

Exemple : une loi de De Morgan

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \neg \exists x. \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \neg A$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \exists x. \neg A$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A$}
\RightLabel{$(t.e.)$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x. A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg \forall x. A$}
\noLine
\BinaryInfC{}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg \forall x. A$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \forall x. A$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \equiv \neg \forall x. A, \neg \exists x. \neg A \vdash \exists x. \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\neg \forall x. A, \exists x. \neg A \vdash \exists x. \neg A$}
\RightLabel{$(t.e.)$}
\BinaryInfC{$\neg \forall x. A \vdash \exists x. \neg A$}
\end{prooftree}
$$

Déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Définition

On note *DN* le système de la déduction naturelle pour la logique classique du premier ordre, constitué :

- des règles déjà vues pour le calcul propositionnel ;
  - axiome (*ax*) ;
  - introduction et élimination pour les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\top$ et $\bot$;
  - règles *structurelles* d'affaiblissement (*aff*), contraction (*cont*) et échange (*ech*) ;
- des règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs $\forall$ et $\exists$;
- des règles pour l'égalité.

Des règles pour l'égalité

Introduction : c'est la réflexivité

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

Des règles pour l'égalité

Introduction : c'est la réflexivité

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

Élimination : on peut substituer les égaux

$$\frac{\Gamma \vdash t = u \qquad \Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

L'égalité est une relation d'équivalence

$$\vdash t = u \Rightarrow u = v \Rightarrow t = v$$

L'égalité est une relation d'équivalence

$$\cfrac{\cfrac{t = u, u = v \vdash t = v}{t = u \vdash u = v \Rightarrow t = v}\;(\Rightarrow_i)}{\vdash t = u \Rightarrow u = v \Rightarrow t = v}\;(\Rightarrow_i)$$

L'égalité est une relation d'équivalence

$$\begin{array}{c} t = u, u = v \vdash (t = x)[x := v] \\ \equiv \\ \dfrac{\dfrac{t = u, u = v \vdash t = v}{t = u \vdash u = v \Rightarrow t = v}\;(\Rightarrow_i)}{\vdash t = u \Rightarrow u = v \Rightarrow t = v}\;(\Rightarrow_i) \end{array}$$

L'égalité est une relation d'équivalence

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{t = u, u = v \vdash u = v}\;(ax) \qquad \begin{array}{c}\dfrac{}{t = u, u = v \vdash t = u}\;(ax)\\ \equiv \\ t = u, u = v \vdash (t = x)[x := u]\end{array}}{\begin{array}{c} t = u, u = v \vdash (t = x)[x := v] \\ \equiv \\ t = u, u = v \vdash t = v\end{array}}\;(=_e)}{t = u \vdash u = v \Rightarrow t = v}\;(\Rightarrow_i)}{\vdash t = u \Rightarrow u = v \Rightarrow t = v}\;(\Rightarrow_i)
$$

L'égalité est une relation d'équivalence

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{}{t = u, u = v \vdash u = v}\,(ax) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{}{t = u, u = v \vdash t = u}\,(ax) \\ \equiv \\ t = u, u = v \vdash (t = x)[x := u] \end{array}}{t = u, u = v \vdash (t = x)[x := v]}\,(=_e) \\
\equiv \\
\dfrac{\dfrac{t = u, u = v \vdash t = v}{t = u \vdash u = v \Rightarrow t = v}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash t = u \Rightarrow u = v \Rightarrow t = v}\,(\Rightarrow_i)
\end{array}$$

$$\dfrac{t = u \vdash u = t}{\vdash t = u \Rightarrow u = t}\,(\Rightarrow_i)$$

L'égalité est une relation d'équivalence

$$
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{
   \dfrac{}{t = u, u = v \vdash u = v}\,(ax)
   \qquad
   \begin{array}{c}\dfrac{}{t = u, u = v \vdash t = u}\,(ax)\\ \equiv \\ t = u, u = v \vdash (t = x)[x := u]\end{array}
  }{
   \begin{array}{c} t = u, u = v \vdash (t = x)[x := v] \\ \equiv \\ t = u, u = v \vdash t = v\end{array}
  }\,(=_e)
 }{t = u \vdash u = v \Rightarrow t = v}\,(\Rightarrow_i)
}{\vdash t = u \Rightarrow u = v \Rightarrow t = v}\,(\Rightarrow_i)
$$

$$
\dfrac{
 \dfrac{
  \dfrac{}{t = u \vdash t = u}\,(ax)
  \qquad
  \dfrac{}{t = u \vdash \textcolor{red}{t} = t}\,(=_i)
 }{t = u \vdash \textcolor{red}{u} = t}\,(=_e)
}{\vdash t = u \Rightarrow u = t}\,(\Rightarrow_i)
$$

Exemple : unicité du neutre

$$\vdash (\forall x. x * e = x) \Rightarrow (\forall x. e' * x = x) \Rightarrow e = e'$$

Exemple : unicité du neutre

$$\dfrac{\dfrac{\forall x.x * e = x, \forall x.e' * x = x \vdash e = e'}{\forall x.x * e = x \vdash (\forall x.e' * x = x) \Rightarrow e = e'}\;(\Rightarrow_i)}{\vdash (\forall x.x * e = x) \Rightarrow (\forall x.e' * x = x) \Rightarrow e = e'}\;(\Rightarrow_i)$$

Exemple : unicité du neutre

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash e' * e = e \qquad\qquad \Gamma \vdash e' * e = e'}{\Gamma \equiv \forall x.x * e = x, \forall x.e' * x = x \vdash e = e'}\;(=_e)}{\forall x.x * e = x \vdash (\forall x.e' * x = x) \Rightarrow e = e'}\;(\Rightarrow_i)}{\vdash (\forall x.x * e = x) \Rightarrow (\forall x.e' * x = x) \Rightarrow e = e'}\;(\Rightarrow_i)$$

Exemple : unicité du neutre

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.e' * x = x}\,(ax)}{\Gamma \vdash e' * e = e}\,(\forall_e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.x * e = x}\,(ax)}{\Gamma \vdash e' * e = e'}\,(\forall_e)}{\Gamma \equiv \forall x.x * e = x, \forall x.e' * x = x \vdash e = e'}\,(=_e)}{\forall x.x * e = x \vdash (\forall x.e' * x = x) \Rightarrow e = e'}\,(\Rightarrow_i)}{\vdash (\forall x.x * e = x) \Rightarrow (\forall x.e' * x = x) \Rightarrow e = e'}\,(\Rightarrow_i)$$