Le théorème de complétude

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications

Objectif

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

Objectif

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

- *démontrable* = dérivable dans DN

Objectif

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

- *démontrable* = dérivable dans DN
- avec les axiomes de T comme hypothèses : $T \vdash A$

Objectif

Théorème (Complétude)

Une formule A est un théorème de la théorie T si et seulement si A est démontrable à partir des axiomes de T.

- *démontrable* = dérivable dans DN
- avec les axiomes de T comme hypothèses : $T \vdash A$ sauf que T peut être infinie...

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash x \times S0 = x \qquad \vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}{\vdash x \times SS0 = x + x}\ (=_e)}{\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x}\ (\forall_i)
$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$
\dfrac{\dfrac{\vdash x \times S0 = x \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A_5}{\vdash \forall y. x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + x}\,(=_e)}{\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)
$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash A_4}{\vdash x + 0 = x}\,(\forall_e) \qquad \vdash x \times S0 = x + 0}{\vdash x \times S0 = x}\,(=_e) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash A_5}{\vdash \forall y.x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + x}\,(=_e)}{\vdash \forall x.x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)$$

Démonstration dans une théorie

Définition

Le séquent $\Gamma \vdash A$ est dérivable à partir de T s'il existe un argument (dans DN) :

- de conclusion $\Gamma \vdash A$ et
- dont toutes les prémisses sont de la forme $\vdash F$ avec $F \in T$.

On note alors $\Gamma \vdash_T A$.

Par exemple dans l'arithmétique de Peano :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\vdash A_4}{\vdash x + 0 = x}\,(\forall_e)
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{\vdash A_6}{\vdash x \times 0 = 0}\,(\forall_e)
      \quad
      \dfrac{\dfrac{\vdash A_5}{\vdash \forall y. x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times S0 = x + (x \times 0)}\,(\forall_e)
    }{\vdash x \times S0 = x + 0}\,(=_e)
  }{\vdash x \times S0 = x}\,(=_e)
  \quad
  \dfrac{\dfrac{\vdash A_5}{\vdash \forall y. x \times Sy = x + (x \times y)}\,(\forall_e)}{\vdash x \times SS0 = x + (x \times S0)}\,(\forall_e)
}{
  \dfrac{\vdash x \times SS0 = x + x}{\vdash \forall x. x \times SS0 = x + x}\,(\forall_i)
}\,(=_e)
$$

Démonstration dans une théorie

Ça revient à rajouter une règle : $\dfrac{A \in T}{\Gamma \vdash A}$ (T)

Lemme

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma \vdash_T A$;
2. $\Gamma \vdash A$ *est dérivable dans* $DN \cup T$;
3. *il existe un contexte* Δ *ne contenant que des formules de* T *tel que* $\Delta, \Gamma \vdash A$ *soit dérivable dans* DN.

Démonstration:

$1 \Rightarrow 2$: il suffit de prouver les prémisses $\vdash F$ en utilisant la règle (T)

□

Démonstration dans une théorie

Ça revient à rajouter une règle : $\dfrac{A \in T}{\Gamma \vdash A}\ (T)$

Lemme

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma \vdash_T A$;
2. $\Gamma \vdash A$ *est dérivable dans* $DN \cup T$;
3. *il existe un contexte* Δ *ne contenant que des formules de* T *tel que* $\Delta, \Gamma \vdash A$ *soit dérivable dans* DN.

Démonstration:

$2 \Rightarrow 3$: en notant Δ la liste des conclusions des instances de (T) utilisées dans la preuve de $\Gamma \vdash A$ dans $DN \cup T$, il suffit d'ajouter Δ à tous les contextes et de remplacer les instances de (T) par des axiomes (ax)

$\square$

Démonstration dans une théorie

Ça revient à rajouter une règle : $\dfrac{A \in T}{\Gamma \vdash A}\ (T)$

Lemme

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\Gamma \vdash_T A$ *;*
2. $\Gamma \vdash A$ *est dérivable dans* $DN \cup T$ *;*
3. *il existe un contexte* Δ *ne contenant que des formules de* T *tel que* $\Delta, \Gamma \vdash A$ *soit dérivable dans* DN*.*

Démonstration:

$3 \Rightarrow 1$: si $\Delta = F_1, \ldots, F_k$, on obtient une preuve de $\Gamma \vdash F_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow F_k \Rightarrow A$, et on dérive chaque $\Gamma \vdash F_i$ en affaiblissant $\vdash F_i$. Il ne reste plus qu'à appliquer $(\Rightarrow_e)$ k fois.

$\square$

Correction

Définition

On dit que A est valide dans T si, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, et tout environnement $e : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$, on a $\mathcal{M}, e \models A$.

Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$, on dit que le séquent $\Gamma \vdash B$ est valide dans T (on note $\Gamma \models_T B$) si $A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$ est valide dans T.

Théorème (Correction)

Si $\Gamma \vdash_T B$ *alors* $\Gamma \models_T B$

Démonstration: Comme toutes les règles de *DN* sont correctes, les arguments préservent la validité. Il suffit donc de vérifier que les prémisses de l'argument de conclusion $\Gamma \vdash_T B$ sont valides. Or, par définition, on a $\models_T F$ dès que $F \in T$. $\square$

Correction

Définition

On dit que A est valide dans T si, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, et tout environnement $e : \mathcal{V} \to |\mathcal{M}|$, on a $\mathcal{M}, e \models A$.

Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$, on dit que le séquent $\Gamma \vdash B$ est valide dans T (on note $\Gamma \models_T B$) si $A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$ est valide dans T.

Théorème (Correction)

Si $\Gamma \vdash_T B$ *alors* $\Gamma \models_T B$

Démonstration: Comme toutes les règles de *DN* sont correctes, les arguments préservent la validité. Il suffit donc de vérifier que les prémisses de l'argument de conclusion $\Gamma \vdash_T B$ sont valides. Or, par définition, on a $\models_T F$ dès que $F \in T$. $\square$

Encore une fois : encore heureux !

Cohérence et contradiction

Rappel : On dit que T est cohérente si T admet au moins un modèle.

Remarque

T est incohérente ssi $\models_T \perp$.

Cohérence et contradiction

Rappel : On dit que T est cohérente si T admet au moins un modèle.

Remarque

T est incohérente ssi $\models_T \bot$.

Définition

On dit que T est contradictoire si $\vdash_T \bot$.

Reformulons :

Théorème (Correction)

- *Si* $\Gamma \vdash_T B$ *alors* $\Gamma \models_T B$
- *Si* $\Gamma \not\models_T B$ *alors* $\Gamma \not\vdash_T B$
- *Si* T *est cohérente, alors elle n'est pas contradictoire.*
- *Si* T *est contradictoire, alors elle incohérente.*

Supposons seulement que T contradictoire $\Rightarrow$ T incohérente :

- supposons $\Gamma \vdash_T B$ avec $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ et $\mathrm{VL}(\Gamma, B) = \{x_1, \ldots, x_k\}$
- on pose $F = \forall x_1 \ldots . \forall x_k . A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_k \Rightarrow B$
- on obtient $\vdash_T F$ donc $\neg F \vdash_T \bot$
- donc $T \cup \{\neg F\}$ est contradictoire
- donc $T \cup \{\neg F\}$ est incohérente
- donc si $\mathcal{M} \models T$ on n'a pas $\mathcal{M} \models \neg F$
- donc si $\mathcal{M} \models T$ on a $\mathcal{M} \models F$
- donc $\models_T F$
- donc $\Gamma \models_T B$

Cohérence et contradiction

Rappel : On dit que T est cohérente si T admet au moins un modèle.

Remarque

T est incohérente ssi $\models_T \bot$.

Définition

On dit que T est contradictoire si $\vdash_T \bot$.

Reformulons :

Théorème (Correction)

- *Si* $\Gamma \vdash_T B$ *alors* $\Gamma \models_T B$
- *Si* $\Gamma \not\models_T B$ *alors* $\Gamma \nvdash_T B$
- *Si T est cohérente, alors elle n'est pas contradictoire.*
- *Si T est contradictoire, alors elle incohérente.*

Vers la complétude

La complétude c'est la réciproque de la correction :

Théorème (Complétude)

- *Si* $\Gamma \models_T B$ *alors* $\Gamma \vdash_T B$
- *Si* $\Gamma \nvdash_T B$ *alors* $\Gamma \not\models_T B$
- *Si T n'est pas contradictoire, alors elle cohérente.*
- *Si T est incohérente, alors elle est contradictoire.*

Attention : David–Nour–Raffalli utilisent "contradictoire" pour "n'admet pas de modèle" et "consistante" pour "ne démontre pas le faux".

Vers la complétude

La complétude c'est la réciproque de la correction :

Théorème (Complétude)

- *Si* $\Gamma \models_T B$ *alors* $\Gamma \vdash_T B$
- *Si* $\Gamma \nvdash_T B$ *alors* $\Gamma \not\models_T B$
- *Si T n'est pas contradictoire, alors elle cohérente.*
- *Si T est incohérente, alors elle est contradictoire.*

Attention : David–Nour–Raffalli utilisent "contradictoire" pour "n'admet pas de modèle" et "consistante" pour "ne démontre pas le faux".

Exercice : démontrez l'équivalence entre ces quatre formulations de la complétude (avec la même méthode que pour la cohérence)

Vers la complétude

La complétude c'est la réciproque de la correction :

Théorème (Complétude)

- *Si* $\Gamma \models_T B$ *alors* $\Gamma \vdash_T B$
- *Si* $\Gamma \nvdash_T B$ *alors* $\Gamma \not\models_T B$
- *Si* T *n'est pas contradictoire, alors elle cohérente.*
- *Si* T *est incohérente, alors elle est contradictoire.*

Attention : David–Nour–Raffalli utilisent "contradictoire" pour "n'admet pas de modèle" et "consistante" pour "ne démontre pas le faux".

Exercice : démontrez l'équivalence entre ces quatre formulations de la complétude (avec la même méthode que pour la cohérence)

On va démontrer que si $\Gamma \nvdash_T \perp$ alors T admet un modèle.

Structure de la preuve

Soit T une théorie non contradictoire : on va construire un modèle $\mathcal{M}$ de T

Structure de la preuve

Soit T une théorie non contradictoire : on va construire un modèle $\mathcal{M}$ de T

- moralement, il « suffit » de prendre pour $|\mathcal{M}|$ l'ensemble des objets dont T peut parler : les termes clos, modulo les égalités prouvables

Structure de la preuve

Soit T une théorie non contradictoire : on va construire un modèle $\mathcal{M}$ de T

- moralement, il « suffit » de prendre pour $|\mathcal{M}|$ l'ensemble des objets dont T peut parler : les termes clos, modulo les égalités prouvables
- pour que la structure obtenue soit un modèle de T, on a besoin de deux hypothèses supplémentaires :

Structure de la preuve

Soit T une théorie non contradictoire : on va construire un modèle $\mathcal{M}$ de T

- moralement, il « suffit » de prendre pour $|\mathcal{M}|$ l'ensemble des objets dont T peut parler : les termes clos, modulo les égalités prouvables
- pour que la structure obtenue soit un modèle de T, on a besoin de deux hypothèses supplémentaires :
  - pour avoir $\mathcal{M} \models \exists x.A$ quand $\vdash_T \exists x.A$, on veut que T soit pleine :
    pour toute formule A avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$, on a un symbole de constante c_A tel que $\vdash_T (\exists x.A) \Rightarrow A[x := c_A]$
  - pour traiter la négation, on veut que T soit complète : $\vdash_T \neg A$ ssi $\nvdash_T A$ (A close)

Structure de la preuve

Soit T une théorie non contradictoire : on va construire un modèle $\mathcal{M}$ de T

- moralement, il « suffit » de prendre pour $|\mathcal{M}|$ l'ensemble des objets dont T peut parler : les termes clos, modulo les égalités prouvables
- pour que la structure obtenue soit un modèle de T, on a besoin de deux hypothèses supplémentaires :
  - pour avoir $\mathcal{M} \models \exists x.A$ quand $\vdash_T \exists x.A$, on veut que T soit pleine : pour toute formule A avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$, on a un symbole de constante c_A tel que $\vdash_T (\exists x.A) \Rightarrow A[x := c_A]$
  - pour traiter la négation, on veut que T soit complète : $\vdash_T \neg A$ ssi $\nvdash_T A$ (A close)

On montre alors :

$$\vdash_T A \text{ ssi } \mathcal{M} \models A$$

Le modèle obtenu est appelé modèle syntaxique de T

Structure de la preuve

Soit T une théorie non contradictoire : on va construire un modèle $\mathcal{M}$ de T

- moralement, il « suffit » de prendre pour $|\mathcal{M}|$ l'ensemble des objets dont T peut parler : les termes clos, modulo les égalités prouvables
- pour que la structure obtenue soit un modèle de T, on a besoin de deux hypothèses supplémentaires :
  - pour avoir $\mathcal{M} \models \exists x.A$ quand $\vdash_T \exists x.A$, on veut que T soit pleine :
    pour toute formule A avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$, on a un symbole de constante c_A tel que $\vdash_T (\exists x.A) \Rightarrow A[x := c_A]$
  - pour traiter la négation, on veut que T soit complète : $\vdash_T \neg A$ ssi $\nvdash_T A$ (A close)

On montre alors :

$$\vdash_T A \text{ ssi } \mathcal{M} \models A$$

Le modèle obtenu est appelé modèle syntaxique de T

Pour en déduire le théorème de complétude en général, il faut montrer que toute théorie T non contradictoire peut être étendue en une théorie T' pleine et complète.

Le modèle syntaxique : la structure

Soit T une théorie sur un langage avec au moins un symbole de constante :

- pour tous termes t, t' on note $t \sim t'$ si $\vdash_T t = t'$
  - on a démontré que $\sim$ est une relation d'équivalence
  - on note $\bar{t}$ la classe de t
- on pose $|\mathcal{M}| = \mathcal{T}_0/\sim$ avec $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des termes clos

Le modèle syntaxique : la structure

Soit T une théorie sur un langage avec au moins un symbole de constante :

- pour tous termes t, t' on note $t \sim t'$ si $\vdash_T t = t'$
  - on a démontré que $\sim$ est une relation d'équivalence
  - on note $\bar{t}$ la classe de t
- on pose $|\mathcal{M}| = \mathcal{T}_0/{\sim}$ avec $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des termes clos
- pour chaque f d'arité n, on pose $f_\mathcal{M}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) = \overline{f(t_1, \ldots, t_n)}$
  - c'est bien défini : $f(t_1, \ldots, t_n) \sim f(u_1, \cdots, u_n)$ dès que $t_1 \sim u_1, \ldots, t_n \sim u_n$
  - en effet, la règle $\dfrac{\vdash t_1 = u_1 \qquad \cdots \qquad \vdash t_n = u_n}{\vdash f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)}$ est dérivable
  - en particulier $[\![t]\!]_\mathcal{M} = \bar{t}$ pour tout $t \in \mathcal{T}_0$

Le modèle syntaxique : la structure

Soit T une théorie sur un langage avec au moins un symbole de constante :

- pour tous termes t, t' on note $t \sim t'$ si $\vdash_T t = t'$
  - on a démontré que $\sim$ est une relation d'équivalence
  - on note $\bar{t}$ la classe de t
- on pose $|\mathcal{M}| = \mathcal{T}_0/\sim$ avec $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des termes clos
- pour chaque f d'arité n, on pose $f_{\mathcal{M}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) = \overline{f(t_1, \ldots, t_n)}$
  - c'est bien défini : $f(t_1, \ldots, t_n) \sim f(u_1, \cdots, u_n)$ dès que $t_1 \sim u_1, \ldots, t_n \sim u_n$
  - en effet, la règle $\dfrac{\vdash t_1 = u_1 \quad \cdots \quad \vdash t_n = u_n}{\vdash f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)}$ est dérivable
  - en particulier $[\![t]\!]_{\mathcal{M}} = \bar{t}$ pour tout $t \in \mathcal{T}_0$
- pour chaque R d'arité n, on pose $R_{\mathcal{M}} = \{(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \text{ t.q. } \vdash_T R(t_1, \ldots, t_n)\}$
  - on a $\mathcal{M} \models R(u_1, \ldots, u_n)$ ssi $\vdash_T R(u_1, \ldots, u_n)$
  - en effet $\mathcal{M} \models R(u_1, \ldots, u_n)$ ssi $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) = (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ avec $\vdash_T R(t_1, \ldots, t_n)$

    et la règle $\dfrac{\vdash t_1 = u_1 \quad \cdots \quad \vdash t_n = u_n \quad \vdash R(t_1, \ldots, t_n)}{\vdash R(u_1, \cdots, u_n)}$ est dérivable

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.

Exercice : pour toute formule F, il existe F' n'utilisant que $\wedge$, $\neg$ et $\exists$, telle que $F \vdash F'$ et $F' \vdash F$

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.
On raisonne par induction sur F :

- Si F est atomique : on a vu que

$$\mathcal{M} \models R(u_1, \ldots, u_n) \text{ ssi } \vdash_T R(u_1, \ldots, u_n)$$

  par la définition de $\mathcal{M}$

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.
On raisonne par induction sur F :

- Si $F = A \wedge B$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models A \wedge B \text{ ssi } & \mathcal{M} \models A \text{ et } \mathcal{M} \models B && \text{(définition)} \\
\text{ssi } & \vdash_T A \text{ et } \vdash_T B && \text{(hypothèse d'induction)} \\
\text{ssi } & \vdash_T A \wedge B && \text{(car } (\wedge_i) \text{ est réversible)}
\end{aligned}
$$

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.
On raisonne par induction sur F :

- Si $F = \neg A$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \neg A \text{ ssi } & \mathcal{M} \not\models A && \text{(définition)} \\
\text{ssi } & \nvdash_T A && \text{(hypothèse d'induction)} \\
\text{ssi } & \vdash_T \neg A && (T \text{ est complète})
\end{aligned}
$$

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.
On raisonne par induction sur F :

- Si $F = \exists x.A$ avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$:

$$\begin{array}{rlr} \mathcal{M}, e \models \exists x.A & \text{ssi il existe } a \in |\mathcal{M}| \text{ t.q. } \mathcal{M}, e[x := a] \models A & (\text{définition de } \models) \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \mathcal{M}, e[x := \bar{t}] \models A & (\text{définition de } |\mathcal{M}|) \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \mathcal{M}, e \models A[x := t] & (\text{car } \bar{t} = [\![t]\!]_{\mathcal{M},e}) \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \vdash_T A[x := t] & (\text{hypothèse d'induction}) \end{array}$$

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.
On raisonne par induction sur *le nombre de connecteurs et de quantificateurs de F* :

- Si $F = \exists x.A$ avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, e \models \exists x.A \text{ ssi il existe } a \in |\mathcal{M}| \text{ t.q. } \mathcal{M}, e[x := a] \models A & \quad \text{(définition de } \models\text{)} \\
\text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \mathcal{M}, e[x := \overline{t}] \models A & \quad \text{(définition de } |\mathcal{M}|\text{)} \\
\text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \mathcal{M}, e \models A[x := t] & \quad \text{(car } \overline{t} = [\![t]\!]_{\mathcal{M},e}\text{)} \\
\text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \vdash_T A[x := t] & \quad \text{(hypothèse d'induction)}
\end{aligned}$$

Le modèle syntaxique : la complétude

Soit T une théorie pleine et complète, et $\mathcal{M}$ sa structure syntaxique :

Théorème

Pour toute formule close F on a $\mathcal{M} \models F$ ssi $\vdash_T F$.

Démonstration: Modulo les lois de De Morgan (qui sont dérivables) on peut se ramener au cas où F est construite à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge$, $\neg$ et $\exists$.
On raisonne par induction sur *le nombre de connecteurs et de quantificateurs de F* :

- Si $F = \exists x.A$ avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$:

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}, e \models \exists x.A & \text{ssi il existe } a \in |\mathcal{M}| \text{ t.q. } \mathcal{M}, e[x := a] \models A & (\text{définition de } \models) \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \mathcal{M}, e[x := \overline{t}] \models A & (\text{définition de } |\mathcal{M}|) \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \mathcal{M}, e \models A[x := t] & (\text{car } \overline{t} = [\![t]\!]_{\mathcal{M},e}) \\ & \text{ssi il existe } t \in \mathcal{T}_0 \text{ t.q. } \vdash_T A[x := t] & (\text{hypothèse d'induction}) \end{array}$$

  - si $\vdash_T A[x := t]$, on a $\vdash_T \exists x.A$ par $(\exists_i)$
  - si $\vdash_T \exists x.A$, on a $\vdash_T A[x := c_A]$ car T est *pleine*

$\square$

Remplir une théorie

On démarre avec une T sur le langage $\mathcal{L}$.

Remplir une théorie

On démarre avec une T sur le langage $\mathcal{L}$.
L'idée est d'ajouter :

- un symbole de constante c_A à $\mathcal{L}$
- un axiome $\exists x.A \Rightarrow A[x := c_A]$ à T

pour chaque $\mathcal{L}$-formule A t.q. $\mathsf{VL}(A) \subset \{x\}$.
Mais il y a de nouvelles formules dans le nouveau langage pour lesquelles il faut encore ajouter un axiome...

Remplir une théorie

On démarre avec une T sur le langage $\mathcal{L}$.

Définition

On définit deux suites croissantes $(\mathcal{L}_n)$ et (T_n) telles que T_n soit une théorie sur $\mathcal{L}_n$:

- $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ et $T_0 = T$
- $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n \cup \{c_A \text{ t.q. } A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_n} \text{ et } \mathrm{VL}(A) \subset \{x\}\}$ en choisissant les c_A deux-à-deux distincts et $\notin \mathcal{L}$
- $T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x.A \Rightarrow A[x := c_A] \text{ t.q. } A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}_n} \text{ et } \mathrm{VL}(A) \subset \{x\}\}$

On pose $T_* = \bigcup_n T_n$ et $\mathcal{L}_* = \bigcup_n \mathcal{L}_n$.

Lemme

Pour toute $\mathcal{L}_*$-formule A avec $\mathrm{VL}(A) \subset \{x\}$, il existe un symbole de constante c_A tel que $\vdash_{T_*} \exists x.A \Rightarrow A[x := c_A]$.

Démonstration: A est une $\mathcal{L}_n$-formule pour un certain n □

Remplir une théorie n'introduit pas de contradiction

Lemme

Si T est non contradictoire alors T_* aussi.

Démonstration: Il suffit de prouver que chaque T_n est non contradictoire : en effet, une preuve de $\vdash \bot$ dans $DN \cup T_*$ n'utilise la règle (T_*) que pour un nombre fini d'axiomes de T_*, donc c'est aussi une preuve dans $DN \cup T_n$ pour n suffisamment grand.
Par récurrence sur n, il suffit de montrer :

- $T_0 = T$ est non contradictoire : c'est l'hypothèse du lemme.
- $\vdash_{T_{n+1}} \bot$ implique $\vdash_{T_n} \bot$.

Lemme

Soit T une théorie sur $\mathcal{L}$ et $c \notin \mathcal{L}$ un symbole de constante.
Si $\Gamma \vdash A$ est un séquent sur $\mathcal{L}$ et $\Gamma[x := c] \vdash_T A[x := c]$ alors on a aussi $\Gamma \vdash_T A$.

Lemme

Soit T une théorie sur $\mathcal{L}$ et $c \notin \mathcal{L}$ un symbole de constante.
Si $\Gamma \vdash A$ est un séquent sur $\mathcal{L}$ et $\Gamma[x := c] \vdash_T A[x := c]$ alors on a aussi $\Gamma \vdash_T A$.

Démonstration: Il suffit de prouver que la règle :

$$\frac{\Gamma[x := c] \vdash A[x := c] \qquad (c \text{ n'apparait ni dans } \Gamma \text{ ni dans } A)}{\Gamma[x := t] \vdash A[x := t]}$$

est admissible dans DN : c'est exactement comme pour la règle (*subst*) du cours précédent.
Alors, si $\Gamma[x := c] \vdash_T A[x := c]$, on a un contexte $\Delta \subset T$ tel que $\Gamma[x := c], \Delta \vdash A[x := c]$ et on dérive :

$$\begin{array}{c} \Gamma[x := c], \Delta \vdash A[x := c] \\ \equiv \\ \dfrac{(\Gamma, \Delta)[x := c] \vdash A[x := c]}{(\Gamma, \Delta)[x := x] \vdash A[x := x]} \\ \equiv \\ \Gamma, \Delta \vdash A \end{array}$$

$\square$

Lemme

Soit T une théorie sur $\mathcal{L}$ et $c \notin \mathcal{L}$ un symbole de constante.
Si $\Gamma \vdash A$ est un séquent sur $\mathcal{L}$ et $\Gamma[x := c] \vdash_T A[x := c]$ alors on a aussi $\Gamma \vdash_T A$.

Fixons une preuve de $\vdash_{T_{n+1}} \bot$. En mettant à part ses prémisses $F_1, \dots, F_k$ dans $T_{n+1} \setminus T_n$:

$$F_1, \dots, F_k \vdash_{T_n} \bot$$

avec $F_i \equiv (\exists x.A_i) \Rightarrow A_i[x := c_i]$ où chaque A_i est une $\mathcal{L}_n$-formule et $c_i \notin \mathcal{L}_n$.
En appliquant k fois le lemme, avec des variables fraîches x_i, on obtient :

$$F'_1, \dots, F'_k \vdash_{T_n} \bot$$

avec $F'_i \equiv (\exists x.A_i) \Rightarrow A_i[x := x_i]$.
En appliquant k fois la règle $\exists_g$, on obtient

$$F''_1, \dots, F''_k \vdash_{T_n} \bot$$

avec $F''_i \equiv \exists x_i.(\exists x.A_i) \Rightarrow A_i[x := x_i]$: cette formule est prouvable !
(Exercice : $\vdash \exists y.(\exists x.A) \Rightarrow A[x := y]$ dès que $y \notin \mathrm{VL}(A)$.)

Remplir une théorie n'introduit pas de contradiction

Lemme

Si T est non contradictoire alors T_* aussi.

Démonstration: Il suffit de prouver que chaque T_n est non contradictoire : en effet, une preuve de $\vdash \perp$ dans $DN \cup T_*$ n'utilise la règle (T_*) que pour un nombre fini d'axiomes de T_*, donc c'est aussi une preuve dans $DN \cup T_n$ pour n suffisamment grand.
Par récurrence sur n, il suffit de montrer :

- $T_0 = T$ est non contradictoire : c'est l'hypothèse du lemme.
- $\vdash_{T_{n+1}} \perp$ implique $\vdash_{T_n} \perp$.

$\square$

Compléter une théorie

Lemme

Si T est non contradictoire il existe une théorie complète $\bar{T} \supset T$ sur le même langage.

Démonstration: On fait la preuve dans le cas où le langage $\mathcal{L}$ de T est dénombrable (sinon, il faut utiliser une forme forte de l'axiome du choix, dont on n'a pas encore discuté).
On se donne donc une suite (A_n) telle que $\{A_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ soit l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules.

On définit une suite T_n de théories : $T_0 = T$ et $T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\neg A_n\} & \text{si } \nvdash_{T_n} A_n \\ T_n \cup \{A_n\} & \text{sinon} \end{cases}$.

On a supposé T_0 non contradictoire. De plus $\vdash_{T_{n+1}} \perp$ implique $\vdash_{T_n} \perp$.

Si $\vdash_{T_{n+1}} \bot$, on peut dériver $\Gamma, B \vdash \bot$, avec $\Gamma \subset T_n$ et $B \in \{A_n, \neg A_n\}$:

- si $\nvdash_{T_n} A_n$, $B = \neg A_n$ donc $\neg A_n \vdash_{T_n} \bot$ et $\vdash_{T_n} A_n$ par $(r.a.)$, ce qui est impossible ;
- si $\vdash_{T_n} A_n$, $B = A_n$ donc $A_n \vdash_{T_n} \bot$ et $\vdash_{T_n} \bot$ par $(coup)$.

Compléter une théorie

Lemme

Si T est non contradictoire il existe une théorie complète $\bar{T} \supset T$ sur le même langage.

Démonstration: On fait la preuve dans le cas où le langage $\mathcal{L}$ de T est dénombrable (sinon, il faut utiliser une forme forte de l'axiome du choix, dont on n'a pas encore discuté).
On se donne donc une suite (A_n) telle que $\{A_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ soit l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules.
On définit une suite T_n de théories : $T_0 = T$ et $T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\neg A_n\} & \text{si } \nvdash_{T_n} A_n \\ T_n \cup \{A_n\} & \text{sinon} \end{cases}$.
On a supposé T_0 non contradictoire. De plus $\vdash_{T_{n+1}} \perp$ implique $\vdash_{T_n} \perp$.
Par récurrence, chaque T_n est non contradictoire.
On pose $\bar{T} = \bigcup_n T_n$:

- $\bar{T}$ est non contradictoire car toute preuve dans $\bar{T}$ est également une preuve de T_n pour n suffisamment grand
- pour toute formule close, $A \in \bar{T}$ ou $\neg A \in \bar{T}$, donc T est complète.

$\square$

Complétude

Théorème (Complétude)

Si T n'est pas contradictoire, alors elle cohérente.

Démonstration: Soit T une théorie non contradictoire sur le langage $\mathcal{L}$.

- On peut construire une théorie non contradictoire $T_* \supset T$, pleine sur $\mathcal{L}_* \supset \mathcal{L}$.
- On considère la complétion de T_* : $T' = \bar{T}_*$.
- On a vu que T' est complète et non contradictoire.
- Comme $T' \supset T_*$, T' est également pleine sur le langage $\mathcal{L}_*$.
- Donc T' admet un modèle $\mathcal{M}'$.
- Comme $T \subset T'$, on obtient également un modèle de T.

□