Phénomènes d'incomplétude

Lionel Vaux Auclair

I2M, université d'Aix-Marseille

Logique et calculabilité
M1 Mathématiques et applications

Rappel

Théorème (Correction et complétude)

Une formule A est valide dans tout modèle de la théorie T ssi A est démontrable dans $DN \cup T$.

Le premier théorème d'incomplétude de Gödel

Théorème

Si la théorie T est cohérente et récursive,[1] *et contient l'arithmétique élémentaire alors T est incomplète.*

Démonstration: (au lance-pierre)

- on peut coder les suites finies d'entiers, les formules et les démonstrations comme des entiers, tous ces codages étant des fonctions récursives et d'image récursive
- les fonctions récursives sont représentables par des formules en arithmétique élémentaire
- en particulier il y a une formule $Dem_T[x, y]$ qui dit « *x est la plus petite preuve de y* » ou plutôt : « *x est le plus petit entier qui est le code d'une preuve de la formule codée par y* »
- par diagonalisation (cf. la preuve que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable, ou le paradoxe de Russel, ou le théorème de l'arrêt) on obtient une formule G_T telle que $\vdash_T G_T \Leftrightarrow \neg\exists z.Dem_T[z, code(G_T)]$
- alors G_T est démontrable dans T ssi $\neg G_T$ l'est

$\square$

1. En tant qu'ensemble : la fonction caractéristique doit être calculable.

Exemples

- *PA* n'est pas complète
- on peut construire $\mathbf{N}$ dans *ZF* comme l'ensemble ω des ordinaux finis et alors les axiomes de *PA* relativisés à ω sont prouvables :
  donc *ZF* n'est pas complète

Le second théorème d'incomplétude de Gödel

Théorème

Si la théorie T est cohérente et récursive, et contient l'arithmétique de Peano, alors la formule $Coh_T \equiv \neg\exists z.Dem_T[z, code(\bot)]$ exprimant la cohérence de T n'est pas démontrable dans T.

Démonstration: (au bazooka)

- on peut formaliser la preuve du premier théorème d'incomplétude dans PA
- on obtient une preuve formelle de $Coh_T \Rightarrow \neg\exists z.Dem_T[z, code(G_T)]$ donc de $Coh_T \Rightarrow G_T$
- or G_T n'est pas démontrable

$\square$

Le second théorème d'incomplétude de Gödel

Théorème

Si la théorie T est cohérente et récursive, et contient l'arithmétique de Peano, alors la formule $Coh_T \equiv \neg\exists z. Dem_T[z, code(\bot)]$ exprimant la cohérence de T n'est pas démontrable dans T.

Démonstration: (au bazooka)

- on peut formaliser la preuve du premier théorème d'incomplétude dans PA
- on obtient une preuve formelle de $Coh_T \Rightarrow \neg\exists z. Dem_T[z, code(G_T)]$ donc de $Coh_T \Rightarrow G_T$
- or G_T n'est pas démontrable

$\square$

Des détails ?

- Plein de bouquins
- Une référence assez complète mais concise et très lisible :
  Les théorèmes d'incomplétude de Gödel, par Alexandre Miquel
  `http://perso.ens-lyon.fr/natacha.portier/enseign/logique/GoedelParAlex.pdf`

Exemples

- on ne peut pas montrer Coh_{PA} dans PA
- on ne peut pas montrer Coh_{ZF} dans ZF
- mais on peut montrer Coh_{PA} dans ZF puisque $\omega \models PA$

Arithmétique « standard »

Posons $N = \{A$ formule close de l'arithmétique t.q. $\mathbf{N} \models A\}$,

- N est cohérente et complète par construction : $\mathbf{N} \not\models A$ ssi $\mathbf{N} \models \neg A$
- N contient l'arithmétique de Peano : $\mathbf{N} \models PA$

Donc N n'est pas récursive.

Indécidabilité de l'arithmétique élémentaire

Théorème

Si T est une théorie cohérente et récursive contenant l'arithmétique élémentaire, alors aucun des deux ensembles (récursivement énumérables) :

$$P = \{A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \vdash_T A\}$$
$$R = \{A \in \mathcal{F} \text{ t.q. } \vdash_T \neg A\}$$

n'est récursif.

Démonstration: Notez que P est récursif ssi R l'est (ssi la prouvabilité dans T est décidable). Si P est récursif, on obtient une contradiction par diagonalisation, comme pour l'arrêt :

- on pose $Q = \{A[x] \text{ t.q. } \nvdash_T A(code(A))\}$ qui est récursif
- on obtient une formule $B[x]$ qui représente Q : $\vdash_T B(n)$ ssi $n = code(A)$ pour $A \in Q$
- on a $code(B) \in Q$ ssi $\vdash_T B(code(B))$ ssi $code(B) \notin Q$

$\square$

Indécidabilité de la logique du premier ordre

Théorème

L'ensemble des tautologies (sur le langage de l'arithmétique) n'est pas récursif.

Démonstration: Sinon l'ensemble des tautologies de la forme $A_1 \wedge \cdots \wedge A_7 \Rightarrow B$ le serait et donc l'ensemble des formules prouvables dans l'arithmétique élémentaire aussi. $\square$