Exercices: calcul propositionnel

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Exercice 1. Pour chacune des formules suivantes, dessinez l'arbre correspondant, et donnez sa taille, sa hauteur, et la liste de ses formules atomiques (toutes les lettres dénotent des variables propositionnelles).

1. X ;

2. $\top \vee \bot$;

3. $X \to Y \to Z \to \top$;

4. $X \wedge Y \to Z \wedge \top$.

Exercice 2. Pour chacune des formules suivantes, déterminez s'il s'agit d'une tautologie (en considérant A, B, C comme des variables propositionnelles).

1. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) \vee (C \Rightarrow A)$;

2. $(A \Rightarrow B) \vee B$;

3. $(A \Rightarrow B) \vee A$;

4. $(A \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;

5. $(A \vee B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$;

6. $(A \Rightarrow \neg C) \vee (B \Rightarrow C)$.

Exercice 3. On dit qu'une formule est en forme normale si elle n'utilise que les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$, et ses seules négations portent sur des atomes. Autrement dit, les formes normales sont données par :

$$\mathcal{F}_{norm} \ni P, Q ::= X \mid \neg X \mid P \wedge Q \mid P \vee Q.$$

1. Montrez (par induction sur les formules en forme normale) que si $P \in \mathcal{F}_{norm}$ est en forme normale alors $\neg P$ est équivalente à une forme normale : il existe $P' \in \mathcal{F}_{norm}$ telle que $\neg P \equiv P'$.

2. Montrez que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale (on rappelle que toute formule est équivalente à une formule dans $\mathcal{F}_{\wedge,\neg}$).

Exercice 4. On appelle littéral tout formule réduite à une variable propositionnelle (X) ou la négation d'une variable propositionnelle ($\neg Y$). On appelle clause conjonctive toute conjonction de littéraux : par exemple $X \wedge Y \wedge \neg Z$. Autrement dit, les clauses conjonctives sont de la forme :

$$C, D ::= X \mid \neg X \mid C \wedge D.$$

On appelle forme normale disjonctive toute disjonction de clauses conjonctives : par exemple $(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y)$. Autrement dit, les formes normales disjonctives sont de la forme :

$$F, G ::= C \mid F \vee G$$

où C parcourt les clauses conjonctives.

1. Montrez (par exemple par induction sur C) que si F est une forme normale disjonctive et C est une clause conjonctive alors $F \wedge C$ est équivalente à une forme normale disjonctive.

2. À l'aide de l'exercice précédent, déduisez-en que toute formule propositionnelle est équivalente à une forme normale disjonctive. [1]

---

1. De même, on appelle clause disjonctive toute disjonction de littéraux et forme normale conjonctive toute conjonction de clauses disjonctives. On obtient le même résultat. C'est une notion cruciale pour comprendre les exemples canoniques de problèmes NP-complets, qui sont des variantes de la satisfaisabilité des formes normales conjonctives.