Exercices: calcul des prédicats

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Exercice 1. On se donne un symbole de fonction unaire S et un symbole de constante 0. On considère l'interprétation dans $\mathbf{N}$ où S est la fonction successeur et 0 a sa valeur usuelle. (Formellement, on définit une interprétation $\mathcal{N}$ avec $|\mathcal{N}| = \mathbf{N}$, $S_{\mathcal{N}} : n \in \mathbf{N} \mapsto n+1$ et $0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbf{N}$).

1. Écrivez un terme (sans variable) dont la valeur est 3.

2. À quelle condition sur l'environnement e a-t-on $[\![Sx]\!]_e = [\![y]\!]_e$?

3. À quelle condition sur l'environnement e a-t-on $[\![Sx]\!]_e = [\![Sy]\!]_e$?

4. À quelle condition sur l'environnement e a-t-on $[\![Sx]\!]_e = [\![0]\!]_e$?

Exercice 2. Renommez les variables liées de la formule

$$(\forall y.x = y \vee \exists x.y = f(x)) \wedge \forall x.f(x) = x$$

afin que, dans toute sous-formule, aucune variable n'apparaisse à la fois libre et liée. Dessinez l'arbre correspondant à la formule obtenue : quelle est sa taille, sa hauteur ?

Exercice 3. Pour chacune des formules suivantes, trouvez une interprétation qui la valide et une qui la falsifie :

1. $\forall x.\forall y.f(x) = f(y)$;

2. $\forall x.R(x, f(x))$;

3. $\forall x.\exists y.R(x, y)$;

4. $\exists x.\forall y.R(x, y)$.

Exercice 4. On se donne quatre interprétations de la signature constituée des seuls symboles de relations binaires $=$ et $\leq$:

— $\mathbf{Z}$ avec l'ordre usuel ;

— $\mathbf{R}$ avec l'ordre usuel ;

— $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ avec $a \leq b$ ssi a divise b ;

— l'ensemble des parties de $\{0, 1\}$ avec $a \leq b$ ssi $a \subseteq b$.

Pour chacune de ces interprétations, trouvez une formule valide dans cette interprétation et pas dans les trois autres.

Exercice 5. Pour chacune des formules suivantes, déterminez s'il s'agit d'une tautologie (avec R un symbole de relation unaire et S un symbole de relation binaire).

1. $\forall x.(\forall y.S(x,y)) \Rightarrow S(x,x)$;
2. $\forall x.\forall y.S(x,y) \Rightarrow S(x,x)$;
3. $\forall x.\exists y.R(y) \Rightarrow R(x)$;
4. $\exists x.\forall y.R(y) \Rightarrow R(x)$.

Exercice 6. En supposant que $x \notin \mathsf{VL}(A)$, vérifiez chacune des équivalences suivantes :

1. $A \vee \forall x.B \equiv \forall x.A \vee B$;
2. $A \vee \exists x.B \equiv \exists x.A \vee B$;
3. $A \wedge \forall x.B \equiv \forall x.A \wedge B$;
4. $A \wedge \exists x.B \equiv \exists x.A \wedge B$.

Exercice 7. Considérons l'ensemble des formules sans quantificateurs $\mathcal{F}_0$:

$$\mathcal{F}_0 \ni F, G ::= R(t_1, \ldots, t_n) \mid F \wedge G \mid F \vee G \mid \neg F$$

et celui des formules prénexes :

$$\mathcal{F}_{pre} \ni P, Q ::= F \mid \forall x.P \mid \exists x.P$$

c'est-à-dire l'ensemble des formules obtenues par une suite de quantifications à partir d'une formule sans quantificateurs.

1. Montrez que si $P \in \mathcal{F}_{pre}$ alors $\neg P$ est équivalente à une formule prénexe.
2. Montrez que si P et $Q \in \mathcal{F}_{pre}$ alors $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ sont équivalentes à des formules prénexes.
3. Montrez que toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule prénexe.