Exercices: théories

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2022–2023

Exercice 1. On se donne la signature $\Sigma_{grp} \coloneqq \{\cdot, e, ()^{-1}, =\}$ usuelle pour les groupes.

1. Donnez une théorie $\mathcal{G}$ sur Σ_{grp} dont les modèles sont exactement les groupes (avec $\cdot$ comme loi, e comme neutre et $()^{-1}$ comme inverse).

2. Donnez une théorie $\mathcal{G}_{ab}$ sur Σ_{grp} dont les modèles sont exactement les groupes abéliens.

3. Donnez une théorie $\mathcal{G}_{\neg ab}$ sur Σ_{grp} dont les modèles sont exactement les groupes non abéliens.

4. Reformulez les axiomes de $\mathcal{G}$ pour qu'ils n'utilisent que le symbole $\cdot$ en plus de l'égalité.

Exercice 2. On se donne la signature $\Sigma_{ann} \coloneqq \{0, 1, +, -, \times, =\}$ usuelle pour les anneaux.

1. Donnez une théorie $\mathcal{A}$ sur Σ_{ann} dont les modèles sont exactement les anneaux.

2. Donnez une théorie $\mathcal{C}$ sur Σ_{ann} dont les modèles sont exactement les corps.

3. Pour chaque $p \in \mathbf{N}$, donnez une théorie $\mathcal{C}_p$ sur Σ_{ann} dont les modèles sont exactement les corps de caractéristique p (commencez par le cas $p > 0$).

Exercice 3. Soit Σ une signature contenant le symbole d'égalité.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, donnez une formule $C_{\geq n}$ sur la signature restreinte au symbole d'égalité, telle qu'une interprétation $\mathcal{I}$ valide $C_{\geq n}$ ssi $\#|\mathcal{I}| \geq n$.

On pose $\mathcal{T}_\infty \coloneqq \{C_{\geq n} \mid n \in \mathbf{N}\}$.

2. Vérifiez que, pour toute interprétation $\mathcal{I}$ de Σ, on a $\mathcal{I} \models \mathcal{T}_\infty$ ssi $|\mathcal{I}|$ est infini.

Supposons donnée une théorie $\mathcal{T}_{fini}$ sur Σ telle que, pour toute interprétation $\mathcal{I}$ de Σ, on a $\mathcal{I} \models \mathcal{T}_{fini}$ ssi $|\mathcal{I}|$ est fini.

3. Montrez que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la théorie $\mathcal{T}_{fini} \cup \{C_{\geq k} \mid k \leq n\}$ est cohérente.

4. En appliquant le théorème de compacité, déduisez-en une contradiction : une telle théorie $\mathcal{T}_{fini}$ ne peut donc exister.

5. Montrez de la même manière qu'il n'existe pas de théorie $\mathcal{G}_{fini}$ sur Σ_{grp} dont les modèles sont exactement les groupes finis (resp. les corps de caractéristique non nulle).

Exercice 4. On se donne un symbole de fonction unaire f, un symbole de constante a, en plus du symbole d'égalité. On définit les formules $A \coloneqq \forall x.\forall y.f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, $B \coloneqq \forall x.f(x) \neq a$ et $C \coloneqq \forall x.x = a \vee \exists y.x = f(y)$

1. Donnez un modèle fini de $\{A, C\}$.

2. Donnez un modèle fini de $\{B, C\}$.

3. Montrez que tous les modèles de $\{A, B\}$ sont infinis.

Pour chaque $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on pose $D_n \coloneqq \forall x. f^n(x) \neq x$. On pose $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ et $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{D_n \mid n > 0\}$.

4. Montrez que, pour chaque $n > 0$, $\mathcal{T} \not\models D_n$.

5. Vérifiez qu'on obtient un modèle de $\mathcal{T}'$ sur la trame $\mathbf{N}$, en interprétant a par 0 et f par la fonction successeur.

6. Donnez un modèle non dénombrable de $\mathcal{T}'$.

Exercice 5. Montrez qu'il n'existe pas de théorie dénombrable $\mathcal{T}_{nd}$ telle que $\mathcal{I} \models \mathcal{T}_{nd}$ ssi $|\mathcal{I}|$ est infini non dénombrable.