

Exercices: arithmétique de Peano

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Exercice 1. Montrez que tout modèle de $\mathcal{P}_0$ est infini.

Exercice 2. Montrez que $\mathcal{P}$ admet un modèle non isomorphe à $\mathbf{N}$.

Exercice 3. Montrez que, dans tout modèle de l'arithmétique de Peano :

1. l'addition est commutative,

2. 0 est absorbant pour la multiplication,

3. 1 est neutre pour la multiplication.

(Vous pouvez prolonger avec toutes les propriétés usuelles...)

Exercice 4. On note $t \leq u := (\exists z. t + z = u)$ et $t < u := t \leq u \wedge t \neq u$. Montrez, dans tout modèle de l'arithmétique de Peano :

1. $\forall x. x \leq x$,

2. $\forall x.\forall y.\forall z.x \leq y \Rightarrow y \leq z \Rightarrow x \leq z,$

3. $\forall x. \forall y. x \leq y \Rightarrow y \leq x \Rightarrow x = y,$

4. $\forall x. x \leq 0 \Rightarrow x = 0,$

5. $\forall x. \forall y. x \leq Sy \Rightarrow x \leq y \vee x = Sy,$

6. $\forall x. \forall y. x \leq y \vee y \leq x.$

Exercice 5. Montrez que la récurrence forte est valide dans tout modèle de l'arithmétique de Peano : $(\forall x.(\forall y.y < x \Rightarrow A[x := y]) \Rightarrow A) \Rightarrow \forall x.A$.

Exercice 6. On ajoute un symbole R de relation unaire, représentant un ensemble quelconque d'individus. Montrez que dans tout interprétation qui satisfait $\mathcal{P}$ et où R est non vide, R a un minimum : $(\exists x.R(x)) \Rightarrow \exists x.R(x) \wedge \forall y.y < x \Rightarrow \neg R(y)$.

Exercice 7. Montrez que :

1. pour tous $n, p \in \mathbf{N}$, si $n \neq p$ alors $\mathcal{P}_0 \models S^n 0 \neq S^p 0$,

2. pour tous $n, p \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_0 \models S^n 0 + S^p 0 = S^{n+p} 0$,

3. pour tous $n, p \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_0 \models S^n 0 \times S^p 0 = S^{n \times p} 0$,

4. pour tout terme clos t de la signature de l'arithmétique, $\mathcal{P}_0 \models t = S^{\llbracket t \rrbracket} 0$.

Déduisez-en que, pour tous termes clos t et u et tout modèle $\mathcal{M}$ de l'arithmétique, on a $\mathcal{M} \models t = u$ ssi $\mathbf{N} \models t = u$.

Exercice 8. Montrez que :

1. $\mathcal{P} \models \forall x.x \neq Sx$

2. $\mathcal{P}_0 \not\models \forall x.x \neq Sx$

3. $\mathcal{P}_0 \not\models \forall x. \forall y. x \times y = y \times x$