Exercices: théorie de la démonstration

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Exercice 1. Montrez que les règles gauches sont dérivables en déduction naturelle.

Exercice 2. Montrez le raisonnement par l'absurde, la règle de Peirce, l'élimination de la double négation et le raisonnement par contraposition sont dérivables en déduction naturelle.

Exercice 3. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\vdash_{DN} A \Rightarrow B$;
- $A \vdash_{DN} B$;
- la règle $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ ($A \downarrow B$) est dérivable pour tout Γ en déduction naturelle ;
- la règle $\frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}$ ($A \uparrow B$) est dérivable pour tous Γ et C en déduction naturelle.

Exercice 4. Quelles sont les règles réversibles dans la déduction naturelle? Et parmi les règles gauches?

Exercice 5. Montrez que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et toute liste de formules $A_1, \dots, A_n$, les règles suivantes sont dérivables en déduction naturelle :

$$\frac{\Gamma, A_1, \dots, A_n \vdash B}{\Gamma, A_1 \wedge \dots \wedge A_n \vdash B} \quad (\wedge_g^n) \qquad \frac{\Gamma, A_1 \vdash B \quad \dots \quad \Gamma, A_n \vdash B}{\Gamma, A_1 \vee \dots \vee A_n \vdash B} \quad (\vee_g^n)$$

(dans la deuxième, on a n séquents hypothèses).

Exercice 6. Si X est une variable propositionnelle, on note $\epsilon_1 X = X$ et $\epsilon_0 X = \neg X$. Pour tout n -uplet $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de variables propositionnelles, et toute fonction $d : \{X_1, \dots, X_n\} \Rightarrow \{0, 1\}$ on note $\Delta(\vec{X}, d) \equiv \epsilon_{d(X_1)} X_1 \wedge \dots \wedge \epsilon_{d(X_n)} X_n$. On note alors $\Sigma(\vec{X}) \equiv \bigvee_{d: \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}} \Delta(\vec{X}, d)$.

1. Montrez que pour tout n -uplet $\vec{X}$ de variables propositionnelles, le séquent $\vdash \Sigma(\vec{X})$ est dérivable.

2. Montrez que, pour toute formule A telle que $\vec{X}$ contient les variables propositionnelles de A , et pour tout $d : \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}$, si $d(A) = 1$ alors $\Delta(\vec{X}, d) \vdash A$, et si $d(A) = 0$ alors $\Delta(\vec{X}, d) \vdash \neg A$.

3. Montrez que pour toute tautologie A dont les variables propositionnelles sont toutes dans $\vec{X}$, on peut dériver $\Sigma(\vec{X}) \vdash A$.

4. Montrez qu'une formule A est une tautologie ssi $\vdash A$ est dérivable : c'est le théorème de complétude pour la logique propositionnelle.