

Exercices: déduction et quantification

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Exercice 1. Démontrez chacune des formules suivantes en déduction naturelle (avec R un symbole de relation unaire).

1. $\forall x.\exists y.R(y) \Rightarrow R(x)$;
2. $\exists x.\forall y.R(y) \Rightarrow R(x)$.

Exercice 2. Démontrez chacune des lois de De Morgan en déduction naturelle :

1. $\neg\forall x.A \vdash \exists x.\neg A$;
2. $\exists x.\neg A \vdash \neg\forall x.A$;
3. $\neg\exists x.A \vdash \forall x.\neg A$;
4. $\forall x.\neg A \vdash \neg\exists x.A$.

Dans quels cas avez-vous besoin de raisonner sur la vérité des formules?

Exercice 3. Démontrez que les règles gauches pour les quantificateurs et l'égalité

$$\frac{\Gamma, A[x := t] \vdash B}{\Gamma, \forall x.A \vdash B} \text{ } (\forall_g) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B \quad (x \notin \text{VL}(\Gamma) \cup \text{VL}(B))}{\Gamma, \exists x.A \vdash B} \text{ } (\exists_g) \quad \frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma, t = u \vdash A[x := u]} \text{ } (=g)$$

sont dérivables dans DN .

Exercice 4. Démontrez que chacune des règles suivantes est dérivable dans DN :

$$\frac{\Gamma \vdash t = u \quad \Gamma, A[x := t] \vdash B}{\Gamma, A[x := u] \vdash B} \quad \frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash s[x := t] = s[x := u]} \quad \frac{\Gamma, t = u \vdash A[x := t] \quad \Gamma, t = u, A[x := t] \vdash B}{\Gamma, t = u \vdash A[x := u] \quad \Gamma, t = u, A[x := u] \vdash B} \quad \frac{}{\Gamma, t = u \vdash s[x := t] = s[x := u]}$$

Exercice 5. On note P_0 le contexte A_1, \dots, A_7 constitué des sept axiomes de l'arithmétique élémentaire. Démontrez que la multiplication par 2 calcule le double :

$$P_0 \vdash \forall x.x \times SS0 = x + x.$$

Quels axiomes de P_0 utilisez-vous?

Exercice 6. Démontrez que la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma[x := t] \vdash A[x := t]} \text{ } (subst)$$

est admissible dans DN .