Exercices: complétude

Lionel Vaux Auclair

Logique et automates
M1 Mathématiques et applications, 2020–2021

Exercice 1. Supposons établi que toute théorie non contradictoire admet un modèle. Déduisez-en les autres formulations du théorème de complétude.

Exercice 2. Montrez que, pour toute formule F, il existe F' n'utilisant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$, et le quantificateur $\exists$, telle que $F \vdash_{DN} F'$ et $F' \vdash_{DN} F$.

Exercice 3. En supposant $y \notin \mathsf{VL}(A)$, démontrez $\vdash_{DN} \exists y.(\exists x.A) \Rightarrow A[x \coloneqq y]$.

Exercice 4. Démontrez le théorème de compacité : si T est incohérente, alors il existe une partie finie T_0 de T qui est incohérente.

Exercice 5. Démontrez le théorème de Löwenheim–Skolem descendant : si la signature Σ est dénombrable et si T est une théorie cohérente sur Σ, alors T admet un modèle de trame finie ou dénombrable.

Exercice 6. Soit T une théorie non contradictoire. On veut construire une théorie complète $T' \supset T$. On pose $T' = T \cup \{\neg A \text{ t.q. } \nvdash_T A\}$. C'est beaucoup plus simple que dans le cours : pourquoi n'a-t-on pas fait comme ça ?