

RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES POUR LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE : L'EXEMPLE DES STAGES HIPPOCAMPE

Pierre ARNOUX* – Lionel VAUX*

Résumé – On présente le mode de fonctionnement des stages Hippocampe. Ce sont des stages de recherche sur 3 jours consécutifs, pour des lycéens ou collégiens, encadrés par des enseignants-chercheurs et des doctorants. Ils se déroulent à l'IREM d'Aix-marseille depuis juin 2005.

Mots-clefs : Stage de recherche, Activité, Lycée

Abstract – The paper explains how the research experiment Hippocampe works. This is an intensive 3-days research period for high-school students, supervised by university teachers and Ph.D. students. It takes place at the IREM of Aix-Marseille, since June 2005.

Keywords: Research activity, Highschool

I. DÉMARCHE

1. Une démarche de recherche au niveau du lycée ou du collège ?

Depuis plusieurs années en France, les programmes du secondaire (collège : de la sixième à la troisième, soit de 11 à 15 ans ; lycée : de la seconde à la terminale, soit de 15 à 18 ans) insistent sur la nécessité d'une activité de recherche pour les élèves. Pour ne donner qu'un exemple, le début du dernier programme de première scientifique, publié en juillet 2010, décrit son *objectif général*, en tête du programme, comme suit :

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Cependant, la manière de développer ces compétences, et en particulier de « *mettre en œuvre une recherche* » n'est pas précisée, et il ne semble pas vraiment y avoir de méthode conseillée, ou même reconnue, pour le faire.

Pourtant, diverses expériences ont été développées dans ce sens par des enseignants et des mathématiciens au cours des dernières années. Elles sont inspirées par les travaux déjà anciens de Georges Pólya sur l'induction et l'analogie en mathématiques (Pólya, 1949, 1968) et ceux d'Imre Lakatos sur le rôle de l'erreur dans le développement des mathématiques (Lakatos, 1976). On peut citer en particulier les travaux de l'IREM de Lyon sur les problèmes ouverts (Arsac et al., 1991), l'expérience MATH.en.JEANS (Audin et Duchet, 1992 ; Beddou et Mauduit, 2001, 2004), ou encore les *Situations de Recherche pour la Classe* étudiées par l'équipe Maths-à-modeler à Grenoble (Grenier, 2010).

2. Le laboratoire Pythéas et les stages Hippocampe

Le laboratoire Pythéas, qui fait partie de l'IREM¹ d'Aix-Marseille, s'inscrit dans cette démarche ; il se veut un laboratoire de mathématiques pour tous, et notamment pour les élèves du secondaire, avec deux objectifs essentiels :

* Institut de Mathématiques de Luminy (UMR 6206 CNRS–Université de la Méditerranée) et groupe Hippocampe de l'IREM d'Aix-Marseille, arnoux@iml.univ-mrs.fr, vaux@iml.univ-mrs.fr.

¹ Les Instituts de Recherche en Enseignement des Mathématiques, forment en France un réseau national de structures qui associent des enseignants du primaire, du secondaire et du supérieur, pour effectuer en commun des recherches sur l'enseignement des mathématiques et assurer ainsi des formations de professeurs s'appuyant fortement sur la recherche. Voir <http://www.univ-irem.fr>.

- participer à la diffusion de la culture et de l'esprit scientifique ;
- lutter contre la désaffection des élèves pour les filières scientifiques (qui ne reflète pas, selon nous, une désaffection pour les sciences).

Il ne s'agit pas de présenter des résultats ou des travaux à un public non académique. Le cœur de notre démarche, et le fil conducteur de nos activités, est la volonté de placer l'élève lui-même dans la situation du chercheur, lequel construit un savoir personnel avant de le structurer et de le transmettre.

Le laboratoire mène des actions variées, en particulier des ateliers MATH.en.JEANS et des activités de diffusion de la culture scientifique ; l'activité que nous présentons dans cet article, les stages Hippocampe, se développe depuis plus de 6 ans et a pris de plus en plus d'importance.

Un stage Hippocampe en Mathématiques consiste à accueillir une classe de lycéens pendant trois jours consécutifs, à l'université, pour une initiation à la recherche en Mathématiques. Encadrés par des chercheurs, les élèves réfléchissent sur des problèmes de Mathématiques, en lien avec les thèmes de travail du chercheur responsable du stage. Ils posent des questions et élaborent des hypothèses, puis ils expérimentent, discutent, débattent et communiquent, comme le font quotidiennement les chercheurs dans leur activité. Enfin, ils présentent leurs travaux à d'autres chercheurs lors d'une séance de posters.

La particularité de cette démarche, par contraste avec celles citées plus haut, est qu'elle se développe à l'extérieur de la classe, en immersion dans le milieu universitaire, et pour une période brève mais intense.

II. HISTORIQUE ET CONTEXTE

1. *À Marseille*

L'équipe à l'origine du projet était constituée de Marie-Renée Fleury, Jean-Louis Maltret, Christian Mauduit et Robert Rolland, de l'IREM d'Aix-Marseille. Le format est adapté de celui des stages de recherche en Biologie initiés à l'INMED² en 2004 par Constance Hammond et l'association Hippocampe, et maintenant portés par l'association Tous Chercheurs. Dans la suite, l'appellation « stage Hippocampe » désigne les stages en Mathématiques.

Le premier stage eu lieu à l'IREM d'Aix-Marseille en juin 2005. Les retours furent très positifs, tant pour les élèves et leur professeur que pour les tuteurs. Il fut suivi par trois nouveaux stages dont un sur une thématique informatique, en 2005-2006. Cette activité a rapidement atteint un rythme de croisière d'une quinzaine de stages par an.

Une sélection de sujets proposés depuis 2005 est fournie en annexe. L'intégralité des thèmes de stages effectués depuis septembre 2008 est consultable en ligne, dans la rubrique Hippocampe du site de l'IREM : <http://www.irem.univ-mrs.fr/-Hippocampe->. Les archives des stages précédents sont disponibles sur <http://iml.univ-mrs.fr/~mrd/Hippocampe/>.

Les principaux partenaires scientifiques et pédagogiques du laboratoire Pythéas pour les stages Hippocampe sont le rectorat d'Aix-Marseille, la faculté des Sciences de Luminy (Unité de Formation et de Recherche en Sciences de l'Université de la Méditerranée) et l'Institut de Mathématiques de Luminy (IML, UMR 6206 du CNRS) dont sont issus la plupart des chercheurs impliqués. Il suffit cependant de parcourir la liste des sujets proposés pour établir que les activités ne sont pas strictement ciblées sur les mathématiques : les stages Hippocampe accueillent aussi régulièrement des thèmes d'informatique ou des thèmes pluridisciplinaires, souvent en partenariat avec d'autres unités de recherche marseillaises.

² Institut de Neurobiologie de la MÉditerranée : UMR INSERM–Université de la Méditerranée.

Une collaboration avec le Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM, UMS 822 CNRS–SMF) vient par ailleurs d’être mise en place : dans ce cadre, certaines séances de posters se déroulent dans les locaux du CIRM, à l’occasion de colloques ou de groupes de travail, afin que des chercheurs extérieurs à l’UFR Sciences puissent y participer.

Les stages Hippocampe étaient initialement destinés aux sections scientifiques du lycée. Très tôt, ils se sont ouverts à d’autres publics du secondaire : collèges, classes de seconde, sections non scientifiques. Dès 2006, un effort particulier a été fait pour encourager l’accès aux stages pour des classes d’éducation prioritaire : cet effort a été reconnu et soutenu par une subvention « Promouvoir l’égalité des chances à l’université » (ministère délégué à la Promotion de l’Égalité des Chances, et ministère délégué à l’Enseignement Supérieur et à la Recherche) en 2006. Depuis 2007, un ou deux stages Hippocampe sont en outre réalisés chaque année avec des élèves de l’École de la Deuxième Chance de Marseille,³ également au laboratoire Pythéas.

Les principaux destinataires de l’action Hippocampe sont évidemment les jeunes stagiaires, avec les objectifs annoncés plus hauts. Les stages ont cependant été conçus en prenant en compte une attente complémentaire : celle de la formation des doctorants, lesquels constituent la majorité des encadrants (ils sont tuteurs : voir plus loin leur rôle exact), et sont généralement de futurs enseignants, dans le supérieur ou dans le secondaire. Nous avons par ailleurs commencé en 2010-2011 à intégrer comme tuteurs des agrégatifs⁴, ainsi que des étudiants de la spécialité Éducation et Formation en Mathématiques (EFM) de la deuxième année du master de Mathématiques et Applications de Marseille (préparation au CAPES⁵). Dans ce sens, Hippocampe relève de la recherche et de la formation à la fois en Mathématiques et en Didactique des Mathématiques ; l’un des principaux apports de ces stages est peut-être de convaincre par l’exemple de futurs enseignants que ce type de démarche est possible.

2. *Essaimage*

À partir de l’expérience pionnière de notre IREM, le principe de stages Hippocampe en Mathématiques se diffuse régulièrement en France, notamment à travers le réseau national des IREM. Notre équipe continue de faire connaître et de promouvoir ce type d’activité et fait partager autant que possible son savoir faire et ses méthodes, notamment dans les manifestations dédiées à l’enseignement des Mathématiques (rencontres de l’APMEP⁶, réunions de l’ADIREM⁷, etc.).

Des stages Hippocampe en Mathématiques sont ainsi organisés par l’IREM de Brest depuis 2007 et celui de Lyon depuis 2009. De même à Toulouse, où les premiers stages ont eu lieu en janvier 2011, et à Nice, avec un premier stage en mai 2011.

³ Initiative européenne portée et soutenue, depuis 1997 par l’État, la Région Provence-Alpes-Côte d’Azur, le Département des Bouches-du-Rhône, la Communauté Urbaine Marseille-Provence-Métropole, la Ville de Marseille, la Chambre de Commerce et d’Industrie Marseille-Provence, avec le soutien des fonds structurels européens FEDER et FSE. Voir <http://www.e2c-marseille.net/>.

⁴ Étudiants préparant l’agrégation, concours pour devenir enseignant en lycée ou au niveau licence, d’un niveau théorique élevé.

⁵ Certificat d’Aptitude au Professorat de l’Enseignement du Second degré, concours pour professeur en lycée et collège.

⁶ Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public : association française fondée en 1910, qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l’université.

⁷ Assemblée des Directeurs d’IREM.

III. DÉROULEMENT D'UN STAGE

1. Le stage type

Chaque stage mobilise une petite équipe d'encadrants scientifiques : un responsable qui détermine la thématique du stage et propose des pistes de recherche, et des tuteurs (souvent des doctorants, de jeunes enseignants-chercheurs, ou des étudiants d'une spécialité de formation à l'enseignement dans un master de mathématiques) qui accompagnent les élèves tout au long du stage.

La première partie du stage consiste en une information sur le déroulement du stage et la présentation du thème par le scientifique responsable. Les élèves forment ensuite de petits groupes, typiquement de quatre élèves. Chaque tuteur accompagne deux groupes au cours des trois jours, ce qui incite à alterner moments de discussion et moments de réflexion.

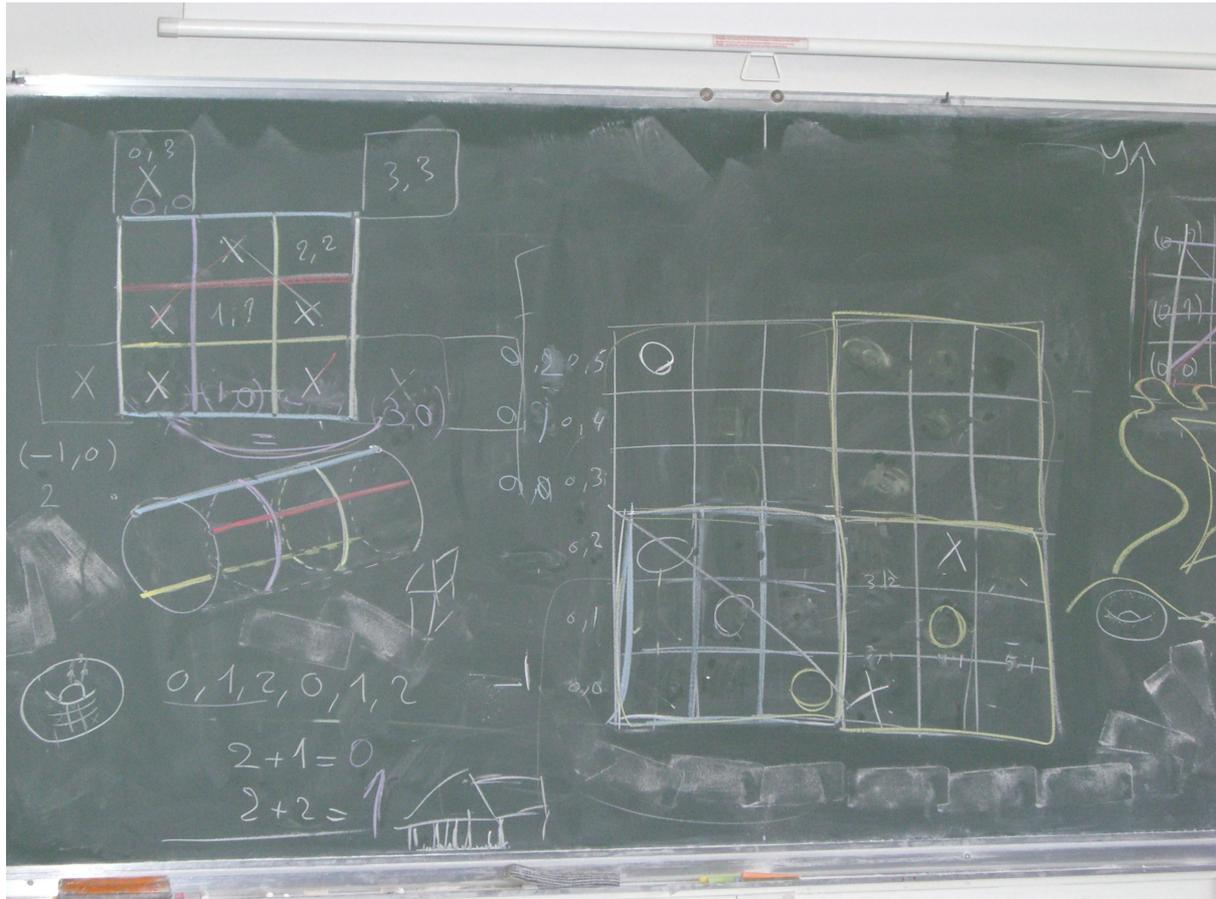


Figure 1 – Tableau au cours d'une séance de travail

Chaque groupe s'oriente vers une piste de recherche, préétablie ou non. La première tâche des élèves est de s'approprier le thème de travail, de développer et de préciser les questions qui les intéressent, les approches qu'ils envisagent. La simple définition des objets mathématiques en jeu est souvent un problème en soi. Cette première partie peut se passer de façon diverse suivant les stages, nous reviendrons sur ce point.

Le travail de recherche se poursuit ensuite avec les premières conjectures, les tests et expérimentations qui les mettent à l'épreuve, les ébauches d'argumentation. On est rapidement confronté aux erreurs, aux hypothèses erronées, aux fausses évidences. C'est l'occasion de découvrir le caractère non linéaire du développement de nouvelles mathématiques, en contraste avec le déroulement classique d'un cours ou d'un exposé. C'est aussi l'occasion de découvrir la difficulté, et l'importance, de donner une bonne définition d'un concept apparemment simple, ou d'écrire un énoncé cohérent.

Dès le deuxième jour, le travail de recherche à proprement parler est mené en parallèle d'un travail sur la formalisation et la présentation à la fois de la problématique abordée et des possibles résultats déjà établis. Souvent, une courte présentation du sujet traité par chaque

groupe, devant les autres participants, est l'occasion de réaliser la difficulté d'un tel exercice. Le responsable du stage passe régulièrement dans les groupes pour discuter avec eux, voir où en est leur travail, et poser des questions (c'est en particulier surtout à lui qu'il incombe d'éviter le risque toujours présent de voir l'activité du groupe se tourner vers une voie sans issue).



Figure 2 – Séance de posters

L'après-midi du troisième et dernier jour est consacrée à la présentation de posters, élaborés dans les heures précédentes, parfois dès la veille et jusqu'en début d'après-midi. Tous les chercheurs intéressés sont conviés à cette séance au cours de laquelle ils peuvent découvrir les travaux des élèves, leur faire préciser certains points, les interroger sur leurs conjectures, leur proposer d'autres pistes.

Les élèves sont accueillis dans les locaux de l'IREM. Ils y disposent d'une salle informatique équipée de logiciels utiles à l'expérimentation mathématique (le laboratoire Pythéas propose un serveur Sage⁸). Ils ont aussi accès aux bibliothèques universitaires et du CIRM.

Le laboratoire Pythéas propose également aux participants Hippocampe de rendre publics leurs travaux sur son site Internet.⁹ Ceci permet de valoriser l'investissement des élèves au-delà de la seule période du stage.

L'enseignant de la classe est généralement présent, sans que ce soit obligatoire, mais il ne participe pas à l'encadrement du stage. Il n'y a pas pour l'instant d'exploitation formelle du stage en classe, et c'est un point auquel il faudrait réfléchir.

⁸ Sage Computer Algebra System : <http://sagemath.org/>.

⁹ <http://pytheas.irem.univ-mrs.fr/hippocampe/>.

2. *Éléments de variabilité*

Nous conservons une certaine souplesse dans l'application de cette formule, afin de laisser de la place pour l'expérimentation pédagogique, et de permettre à chacun des intervenants d'apporter une touche personnelle au déroulement du stage, en accord avec sa propre pratique de la recherche.

En particulier, la phase initiale se déroule différemment suivant les stages ; dans certains, le parcours est bien balisé, et les élèves choisissent entre plusieurs tâches proposées. Dans d'autres, la présentation est à dessein relativement floue, illustrée d'exemple peu théorisés et de questions imprécises ; il revient aux élèves de construire une question et de trouver, à l'aide des tuteurs, les outils pour la résoudre. Ils se trouvent ainsi vraiment dans la position d'un chercheur, et découvrent que poser une bonne question peut être plus difficile que donner une bonne réponse !

Ce type de stage peut être, au début, assez perturbant pour les élèves, qui se trouvent loin de l'univers encadré qu'ils connaissent habituellement. Le bon équilibre (s'il existe !) entre encadrement et non-directivité n'est pas clair pour nous, et c'est pourquoi nous n'avons pas souhaité imposer un format.

Si le responsable du stage est généralement un membre permanent des équipes de l'IML, le laboratoire de Mathématiques voisin, il peut également être doctorant ou issu d'un autre laboratoire. Et bien que de nature mathématique, les thèmes abordés peuvent être issus de questions liées à la physique, à l'informatique, aux sciences humaines, à la biologie, *etc.* Dominique Barbolosi a par exemple publié dans le numéro 71 de Repères-IREM une description détaillée et commentée d'une série de stages qu'il a coordonnés sur le thème Mathématiques et Médecine (Barbolosi, 2008).

IV. RETOMBÉES

Chaque stage concerne une moyenne de 25 élèves pendant 3 jours. Une quinzaine d'établissements sont concernés chaque année, avec une priorité affichée pour les établissements situés en zone d'éducation prioritaire ou les classes considérées comme difficiles. Si on y ajoute les stages délocalisés ou organisés dans d'autres IREM, plus de 2000 élèves ont été impliqués dans cette action depuis sa création.

Pour les élèves, ces stages sont l'occasion d'une immersion dans le milieu universitaire, bien différente de ce que peuvent apporter des opérations « portes ouvertes » par exemple. Notamment, c'est souvent le seul contact que les élèves auront avec le monde de la recherche avant leur possible entrée dans l'enseignement supérieur. Cette occasion est particulièrement importante pour les effectifs issus de zones défavorisées, pour lesquels l'université peut être perçue comme inaccessible. En faisant découvrir une autre manière, plus ouverte, d'aborder les mathématiques, cette approche a régulièrement donné lieu à d'étonnants retournements de situation, des élèves habituellement considérés comme « faibles » prenant l'initiative de la recherche en groupe. C'est aussi l'occasion pour les élèves de découvrir, souvent avec étonnement, que « tout n'a pas été trouvé en mathématiques », et de se faire une autre idée du travail de recherche, que beaucoup envisageaient comme une activité solitaire consistant à noircir du papier dans un bureau.

Réciproquement, ces stages sont l'occasion pour l'université et ses laboratoires de rencontrer un autre public que celui de l'enseignement supérieur. Pour un certain nombre de tuteurs des stages, qui sont généralement des doctorants, le stage joue aussi un rôle de formation professionnelle. Depuis 2010, il est également proposé aux étudiants des parcours de préparation à l'enseignement (CAPES et agrégation) du master de mathématiques de Marseille de participer aux stages en tant que tuteurs dans le cadre de leur TER¹⁰, et les échos recueillis sont pour l'instant très positifs.

¹⁰ Travail d'Etude et de Recherche, mémoire de fin de master.

Enfin, cette action produit des retombées localement, dans tout le champ de la diffusion de la culture scientifique et mathématiques. Ainsi les élèves du secondaire qui participent aux ateliers MATH.en.JEANS ont généralement suivi un stage Hippocampe. Les étudiants de l'unité MATH.en.JEANS en Licence (une unité d'enseignement de la Faculté des Sciences de Luminy, basée sur la démarche MATH.en.JEANS, et qui initie les étudiants à la création et l'animation d'ateliers dans des manifestations scientifiques) sont conviés aux séances de posters Hippocampe, au même titre que les chercheurs des laboratoires. Ces élèves et ces étudiants sont des recrues de choix qui irriguent tout le champ de la diffusion et de l'animation scientifique : concours, forums, fête de la Science, *etc.*

Et ces synergies portent leurs fruits. Ces interventions sont régulièrement récompensées par divers prix et distinctions : notamment, les élèves de l'atelier Euclide du collège Camus de Miramas (Francis Loret) ont successivement reçu la médaille d'or et le grand prix du CNRS au concours Faites de la Science 2008, la médaille d'or du CEA au concours Faites de la Science 2009 et le prix de la fondation C.Génial 2010. En 2011, ils ont représenté la France au concours INTEL ISEF à Los Angeles et remporté la troisième place en Mathématiques.

V. ÉVALUATION

Les réactions des élèves et de leurs professeurs sont systématiquement positives, comme le prouvent les témoignages recueillis au fil des stages. La participation à l'encadrement des stages est par ailleurs considérée comme un élément important de la formation des moniteurs en mathématiques et valorisée comme telle par le CIES.¹¹

Nous sommes cependant bien conscients que l'enthousiasme suscité chez les participants ne suffit pas à fournir une évaluation sérieuse des résultats à moyen et long terme de cette expérience, mais nous ne disposons pas jusque là des outils méthodologiques nécessaires pour évaluer l'impact des stages sur le parcours scolaire puis universitaire des élèves.

Afin de pallier ce manque, nous avons entrepris une collaboration avec Alain Mercier et Yves Matheron de l'UMR P3 ADEF,¹² pour élaborer des critères pertinents ainsi que les moyens de les mesurer à moyen et long terme. Nous avons mis en place les premiers éléments de cette démarche en 2010–2011, en travaillant avec les étudiants de la spécialité Éducation et Formation en Mathématiques du master de Mathématiques et Applications de Marseille. Nous comptons, dans les prochaines années, approfondir ce travail avec l'aide des étudiants des spécialités d'enseignement du master, dans le cadre de mémoires.

Il faut insister sur le fait que les activités menées par les élèves ne relèvent pas de la simple vulgarisation, mais comportent une importante part technique, que ce soit dans les expérimentations ou les démonstrations (nombres complexes, limites, récurrences, algèbre, programmation...); cette part technique utilise les connaissances déjà acquises par les élèves, et les pousse à jeter un autre regard sur ces connaissances. On est souvent surpris de la qualité des travaux réalisés en trois jours; rappelons que si cela semble un très court intervalle de temps, c'est en réalité l'équivalent, en heures de cours, d'un mois de mathématiques dans une classe, et que les enseignants n'ont en pratique jamais les moyens de consacrer un mois dans l'année à une telle activité.

Terminons en mettant en avant le polymorphisme assez important des stages, qui est selon nous à la fois une des forces du dispositif et une difficulté importante pour l'analyse didactique. En effet, en plus de la variabilité des publics concernés d'un stage à l'autre, l'influence des encadrants se fait assez largement sentir, en ce que le stage est le fruit d'un échange entre apprentis chercheurs et chercheurs tuteurs. On retrouve concrètement cette

¹¹ Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur, supprimé en 2010; il avait pour but de donner une formation pédagogique aux doctorants.

¹² Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation : UMR INRP–Université de Provence.

variabilité dans les productions matérielles des stages : les posters présentés en annexe en donnent un bon aperçu, entre rigueur et foisonnement, directives évidentes et travail personnel et original.

VI. ANNEXE : EXEMPLES DE SUJETS ABORDÉS PAR LES STAGES HIPPOCAMPE

Création de nouvelles mathématiques : Christian Mauduit (IML) Initiation à la démarche de chercheur. Apprendre, sur des problèmes simples, à poser des conjectures et à les résoudre à l'aide de contre-exemples ou de démonstrations. Réflexion sur le rôle de l'erreur dans le processus créatif.

Les relations d'ordre et ordres partiels : Christian Aperghis (LIF) Lors de leur cursus scolaire, les élèves travaillent uniquement sur des structures totalement ordonnées. Nous leur ferons découvrir l'existence d'autres manières d'ordonner un ensemble. Nous les laissons ensuite suivre leurs idées pour développer les concepts que nous leur avons présentés.

Cryptographie : Christophe Ritzenthaler (IML) La cryptographie moderne a deux facettes : celle à clé privée et celle à clé publique. Pour les illustrer, nous parlerons chiffrement par décalage d'une part et chiffrement RSA et de l'échange des clés d'autre part. La structure mathématique commune sera les congruences. On commencera donc « par découvrir » leurs propriétés basiques sur des exemples. Ensuite, on s'amusera à chiffrer et déchiffrer des messages, à la main puis à l'aide de l'ordinateur. On discutera enfin les questions de sécurité en regardant quelles sont les attaques possibles.

La géométrie en action : Jean-Louis Maltret (LSIS) Comment bien découper le plan et l'espace ? Diagrammes de Voronoï et applications.

Logique et théorie du calcul : Marie-Renée Fleury et Myriam Quatrini (IML) Qu'est-ce que le langage, la rigueur mathématique, le raisonnement logique ? Pourquoi est-il nécessaire de démontrer et ne pourrait-on se contenter d'expérimenter ? Le théorème des quatre couleurs remet-il en question la définition d'une démonstration ? La logique est aussi un modèle de calcul : des premiers pas pour aborder les notions de calculabilité seront faits sur des machines à registres.

Mathématiques et médecine : Dominique Barbolosi (IFR 125) Comment peut-on sauver des vies humaines grâce aux mathématiques ? Le stage permettra à des groupes d'élèves de s'initier à l'optimisation des protocoles de chimiothérapie dans la lutte contre le cancer, à d'autres, il leur permettra d'appliquer leurs connaissances mathématiques à l'imagerie médicale.

De Galilée à Einstein : la relativité : Jean-Pierre Labesse (IML). Il s'agit de suivre le développement de la problématique de la relativité qui commence avec Galilée, se poursuit avec Newton, puis aboutit à une contradiction avec Maxwell, contradiction levée par Lorentz, Poincaré et Einstein. Ceci donne lieu à des recherches par les élèves sur Galilée, son temps et ses recherches, sur le pendule de Foucault, sur les équations de Maxwell et les transformations de Lorentz ainsi que sur les paradoxes soulevés par Einstein (paradoxe des jumeaux) etc... pour finir avec les trous noirs en relativité générale.

Pliages de papiers, suites auto-similaire et fractals : Pierre Arnoux (IML) Les objets auto-similaires ont des propriétés fascinantes ; ils apparaissent naturellement dans diverses situations, et pourtant leurs propriétés sont paradoxales, et semblent impossibles au premier abord, à commencer par leur dimension, qui est souvent non entière. Le stage donne l'occasion d'aborder diverses méthodes de construction, dont certaines très concrètes, et d'étudier leur comportement. On rencontrera plusieurs exemples qui remontent à très longtemps, et font actuellement l'objet de recherches actives, en particulier au sein du laboratoire.

Mathématiques pour l'astronomie Jacques Gispert, (LIF) Utilisation des mathématiques pour résoudre quelques problèmes d'astronomie concernant des domaines variés, par exemple : utilisation des fractions continues pour l'établissement d'un calendrier, phénomènes périodiques, quelques calculs relatifs au mouvement des planètes, Vénus au Soleil, résolution de l'équation de Képler.

Arithmétique : solutions entières d'équations à coefficients entiers : Vincent Secherre (IML) Le thème sur lequel repose le stage est celui de la détermination des solutions entières d'une équation algébrique à coefficients entiers, qui constitue l'un des principaux problèmes de l'arithmétique. Il s'agit de poser quelques questions simples (Un entier donné peut-il s'écrire comme une somme de deux carrés ? Quels sont tous les triangles rectangles à côtés entiers ? Existe-t-il des triangles rectangles à côtés entiers et d'aire donnée ?) et de proposer aux élèves quelques méthodes de démonstration : algorithme d'Euclide, méthodes géométriques, lois de groupe sur des courbes, congruences, etc.

Les équations différentielles et leurs applications : Natalia Tronko (CPT) Les applications portent sur différents domaines :

- Systèmes dynamiques : théorie qualitative des équations différentielles et systèmes dynamiques et systèmes dynamiques en temps discret.
- Physique Générale : équations différentielles - analogies entre électricité et mécanique.
- Applications aux sciences de la vie et applications à la finance.

Arithmétique et codage dans la vie courante : Stéphane Ballet (IML) Nous proposons l'étude de quelques cas de codage dans la vie courante :

- Codage des nombres dans les ordinateurs ;
- Codage détecteur d'erreurs : les clés de contrôle ;
- Codage chiffré : cryptographie ;
- Codage correcteur d'erreurs.

Modèles de Calcul : Lionel Vaux (IML) Au cours de ce stage on essaiera de dessiner les contours de la notion de calcul, en se posant une question simple mais fondamentale : qu'est-ce que calculer au juste ? Les réponses possibles et les pistes de recherche qui en découlent sont nombreuses : calculabilité, réécriture, constructibilité, systèmes dynamiques, etc. Dans tous les cas il existe des interrogations fondamentales communes : expressivité (qu'est-ce qu'on calcule ?) ; complétude (peut-on tout calculer ?) ; complexité (en combien d'étapes, en utilisant combien d'opérations ?). Pour certains sujets on peut très bien envisager un travail en partie réalisé sur ordinateur (notamment les automates cellulaires 1D ou 2D : il existe des tas de simulateurs).

VII. ANNEXE : EXEMPLES DE POSTERS

Automates cellulaires

Un automate cellulaire est un ruban régulier de cellules contenant chacune un état en 1D choisi parmi un ensemble fini et qui peut évoluer au cours du temps grâce à des règles prédéfinies. Il y a une infinité de règles possibles.

Un type de règles particulier : par voisinage

Soient
 A le nombre de jeux de règles possibles
 B le nombre de configurations possibles du voisinage
 C le nombre d'états possibles d'une cellule
 D le nombre de cellules qui constituent le voisinage

On a $B = C^D$
 et $A = C^B = C^{C^D}$

Dans un voisinage de 3 cellules, il y a $2^3 = 8$ configurations du voisinage différentes, et $2^8 = 256$ jeux de règles différents.

Périodicité
 Quand le ruban fini est fini, l'évolution est périodique à partir d'un certain rang car il n'y a pas une infinité de possibilités.

Donc on retombera automatiquement sur la même configuration au bout d'un certain temps.

On s'intéresse à deux types de règles différentes : avec un voisinage de trois cellules

Règles de majorité

Théorème

On part d'un ruban repêré sur lui-même qui est composé de deux états, dont un majoritaire.
 Si aucun des états minoritaires ne sont voisins, alors au bout d'un certain temps, le ruban sera composé d'états majoritaires seulement → état stable homogène.
 exemple : avec une majorité de 0

0 1 0 1 0 0 0
 0 0 1 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 → état stable et homogène.

En revanche, si 2 états minoritaires sont voisins, le ruban atteindra un état stable, mais non homogène.

0 1 1 0 0 0 0 → état stable
 0 1 1 0 0 0 0 → état stable

Preuves

Une cellule contenant un état est composée de 2 autres cellules d'un autre état → 0 1 0
 Cette cellule va se transformer en cet autre état → 0 0 0

Si deux états similaires sont voisins, alors ils conservent leur état.
 → 0 1 1
 → 0 1 1



Autre exemple.

Période

avec les règles établies,
 10010
 01100
 10111
 00000
 11111
 00000

Utilité

avec les règles établies, on peut déplacer une information le long du ruban, avec une étape intermédiaire :
 00000000
 11110000
 00010000
 11101111
 00000000

Forme particulière

un jardin d'Eden est une combinaison impossible d'être obtenu au fil des générations avec les règles établies.
 0 1 0 1 1



Grâce à ces systèmes de règles, il est possible de déplacer une information ou de synchroniser deux cellules en même temps (la synchronisation nécessitant au minimum 6 états et 143 règles, nous n'avons pu l'étudier).
 Applications dans la vie courante : Les automates cellulaires permettent l'étude de phénomènes de propagation comme les opinions, le trafic routier, la cristallisation, les feux de forêt...

Poster 1 – Réalisé par des élèves de terminale S du Lycée Méditerranée (La Ciotat), pendant le stage Modèles de calcul du 1er au 3 décembre 2009 dirigé par Lionel Vaux.



L'HORLOGE MUSICALE

Claire
SANOVITZ
2°4

Killian ANNO 2°10

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Axelle
MAZEROLLE
2°5

Introduction

On définit la fréquence du DO par 1 et 2 pour son octave. On définit sa gamme chromatique tempérée de tel sorte que les rapports de fréquence entre les notes successives soient constants. Par un calcul on peut démontrer que ce rapport appelé q vérifie $q^{12} = 2$. Si a et b sont deux entiers alors $q^a \cdot q^b = q^{a+b}$. Pour passer d'une note à une autre, on multiplie la fréquence par une puissance ce qui revient à additionner les exposants.

Définition de l'horloge musicale

On place les notes de la gamme chromatique de DO majeur sur les nombres de l'horloge tel que DO = 0 et/ou 12. Grâce à cela on peut remplacer les notes de la gamme de DO par leur nombre numérique. Ainsi on obtient une gamme numérique : 0; 2; 4; 5; 7; 9; 11. À partir de cette gamme nous pourrions trouver toutes les gammes des notes de l'horloge par un calcul. Il consiste à ajouter le nombre de demi-tons, qui correspond à la gamme recherchée, à celle de DO. (Exemple : si on ajoute 3 demi-tons ce qui donne : 3; 5; 7; 9; 10; 12; 2).



Quelques définitions

On considère la gamme chromatique à n notes, par la suite on généralisera ce qu'on a trouvé pour 12 notes, à n .

Définition 1 : une gamme est un ensemble de notes exemple, la gamme de DO majeur : 0; 2; 4; 5; 7; 9; 11.

Définition 2 : une gamme cyclique est une gamme dont les éléments peuvent s'additionner entre eux et dont le résultat est dans la gamme en rapport avec la loi (\oplus_n, \otimes_n) .

Définition 3 : un générateur est l'élément de l'ensemble qui une fois ajouté à lui-même, un certain nombre de fois, donne tous les éléments de cet ensemble. Exemple. Pour $n = 12$, les générateurs sont 1, 5, 7 et 11.

Nos théorèmes

Théorème 1 : les générateurs sont premiers avec n .

Théorème 2 : si le nombre de notes est un nombre premier alors il est impossible de construire une gamme cyclique mis à part sa gamme chromatique car un nombre premier est divisible que par 1 et par lui-même.

Démonstration 1 : On a étudié deux cas particuliers avec $n = 12$ et $n = 13$. Pour $n = 12$, les générateurs sont 1, 5, 7 et 11 qui sont les seuls nombres premiers avec 12. Pour $n = 13$, les générateurs sont 1, ..., 12.

Démonstration 2 : On a étudié les deux mêmes cas. Avec $n = 12$ on a trouvé des gammes cycliques alors qu'avec $n = 13$ on n'a pas trouvé de gamme cyclique.

Elèves de M.P.S du Lycée Marseillaveyre.

Poster 3 – Réalisé par des élèves de seconde du Lycée Marseillaveyre (Marseille), pendant le stage Maths et musique du 7 au 9 mars 2011 dirigé par Anne Pichon (Institut de Mathématiques de Luminy).

RÉFÉRENCES

- Gilbert Arzac, Germain Gilles et Michel Mante. *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon, 1991.
- Pierre Audin et Pierre Duchet. La recherche à l'école : MATH.en.JEANS. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 121, 1992.
- Dominique Barbolosi. Un exemple de démarche scientifique. *Repères-IREM*, (71) :5–22, 2008.
- Laurent Beddou et Christian Mauduit. Research as a method of teaching mathematics. In *Science and Mathematics Teaching for the Information Society*, 2001.
- Laurent Beddou et Christian Mauduit. Recherche et enseignement, l'expérience MATH.en.JEANS. In *Actes de la 3ème université d'été Animath*, 2004.
- Ministère de l'Éducation nationale. Annexe : Mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de première. *Bulletin officiel spécial*, (n°9), septembre 2010.
- Denise Grenier. Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. In Lalina Coulange and Christophe Hache, editors, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009*, pages 161–178. IREM de Paris 7, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques, 2010.
- Imre Lakatos. *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, 1976.
- George Pólya. *How to solve it*. Princeton University Press, 1949.
- George Pólya. *Induction and Analogy in Mathematics*. Oxford University Press, 1968.