Théorie des graphes : flots circulaires

Lionel Vaux

Stage de MIM première année
Ecole Normale Supérieure de Lyon

3 juin – 12 juillet 2002

Responsable de stage :

André Raspaud

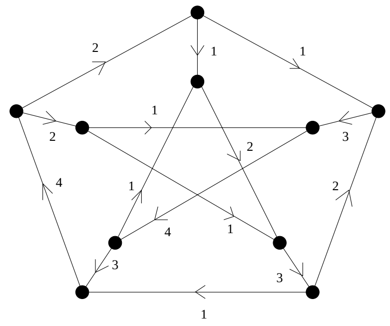

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport présente l'ensemble des travaux de recherche que j'ai menés lors de mon stage de MIM1 au LaBRI du 03 juin au 12 juillet 2002.

1.1 Le LaBRI

Le stage s'est déroulé au sein de l'équipe *Combinatoire et Algorithmique* du LaBRI et sous la direction d'André Raspaud, responsable du thème de recherche *Graphes et applications*. Le LaBRI (Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique) est une Unité Mixte de Recherche du CNRS et ses locaux se situent dans le pôle scientifique du campus de l'Université Bordeaux 1. Cinq équipes de recherche y travaillent, aussi bien sur des problèmes d'informatique théorique que sur les applications pratiques qui peuvent en découler.

Ainsi, un premier axe du thème *Graphes et applications* porte sur des problèmes classiques de théorie des graphes : hamiltonisme, couvertures, colorations... Un autre axe utilise les techniques élaborées en théorie des graphes dans un cadre plus pratique, tel celui des communications et des réseaux, aussi bien pour la mise au point d'algorithmes que pour le développement d'un outil de simulation et de test.

L'équipe *Combinatoire et Algorithmique* travaille également sur trois autres thèmes de recherche : *Combinatoire énumerative, cartes et physique*, *Génération aléatoire et visualisation* et *Algorithmique distribuée.*

1.2 Déroulement du stage et contenu du rapport

Le sujet du stage portait sur l'étude du nombre de flot circulaire dans certaines classes de graphes. Les premiers jours ont été consacrés à une familiarisation avec le cadre général des flots dans les graphes. Il s'agissait d'acquérir une certaine aisance ainsi qu'un début d'intuition dans le domaine.

Je me suis ensuite attaché à l'étude du nombre de flot circulaire d'une famille de graphes : les snarks de Loupekhine. C'est en tentant d'adapter une méthode d'E. Steffen concernant le nombre de flot circulaire du graphe de Petersen que j'ai été amené à m'intéresser plus particulièrement aux valuations balancées. Ces dernières constituent une approche à la fois originale et éclairante des flots circulaires que Jaeger semble avoir inventés avant l'heure.

Si l'étude des valuations balancées n'a pas débouché sur une solution concernant les snarks de Loupekhine, elle a toutefois abouti à d'autres résultats, en particulier une méthode originale de calcul du nombre de flot circulaire pour les graphes cubiques. Parallèlement, j'ai poursuivi mon travail sur les snarks de Loupekhine et obtenu une majoration du nombre de flot circulaire d'une sous-famille.

Le chapitre 2 présente les définitions et les notions nécessaires pour aborder les flots circulaires et mentionne certains résultats et conjectures importants. Dans le chapitre 3, on étudie les valuations balancées : le théorème initial de Jaeger est présenté, puis on étudie le cas particulier des graphes cubiques et la notion de partie balancée. Le chapitre 4 est consacré à l'étude des snarks de Loupekhine. Enfin le chapitre 5 présente quelques voies de recherche pour affiner ou étendre les résultats du chapitre précédent.

Chapitre 2

Flots

2.1 Définitions et notations

Comme souvent en théorie des graphes, la notion de flot est très simple : un flot est une pondération des arcs d'un graphe orienté telle que la somme des poids des arcs arrivant sur un sommet soit toujours égale à celle des poids des arcs qui en sortent. Plus précisément, on donne les définitions suivantes :

2.1.1 Graphes

On considère des (multi)graphes $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On n'autorise pas les boucles *i.e.* toute arête est incidente à deux sommets exactement.

Soit $A \subseteq V$, le graphe restreint $G[A]$ admet A pour ensemble de sommets et ses arêtes sont les arêtes de G dont les deux extremités sont dans A.

2.1.2 Degrés

Si v est un sommet de G, on note $\partial(v)$ l'ensemble des arêtes incidentes à v et $d(v) = |\partial(v)|$ son degré. Plus généralement, soit $X \subseteq V$, on note $\partial(X)$ l'ensemble des arêtes $e \in E$ qui ont une extremité dans X et l'autre dans $V \setminus X$, et $d(X) = |\partial(X)|$ le degré extérieur de X.

Un graphe k-régulier est un graphe dont tous les sommets sont de degré k. Un graphe cubique est un graphe 3-régulier.

On note $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ le degré maximal de G.

2.1.3 Coupes

Une k-coupe est un ensemble d'arêtes de la forme $\partial(X)$, avec $\emptyset \subset X \subset V$ et $d(X) = k$. Un graphe est dit k-connexe s'il n'admet pas de l-coupe, $0 \leq l < k$. Un isthme est une 1-coupe.

2.1.4 Orientations

Une orientation D d'un graphe G est la donnée d'une direction pour toute arête :

$$\begin{array}{rccc} D: & E & \longrightarrow & V \times V \\ & e = \{x, y\} & \longmapsto & (x, y) \text{ ou } (y, x) \end{array}$$

Si $D(e) = (x, y)$, on dit que x (*resp.* y) est la queue (*resp.* la tête) de e. Soit $X \subseteq V$, on note $\partial_D^+(X)$ (*resp.* $\partial_D^-(X)$) l'ensemble des arêtes $e \in E$ dont la tête (*resp.* la queue) est dans X et la queue (*resp.* la tête) dans $V \setminus X$. On note $d_D^+(X) = |\partial_D^+(X)|$ le degré entrant de X et $d_D^-(X) = |\partial_D^-(X)|$ son degré sortant.

2.1.5 Γ-flots

Soit Γ un groupe abélien. Un Γ-flot sur G est un couple (D, ϕ), où D est une orientation sur G et $\phi : E \to \Gamma$ une application vérifiant pour tout $X \subseteq V$:

$$\sum_{e \in \partial_D^+(X)} \phi(e) = \sum_{e \in \partial_D^-(X)} \phi(e)$$

Un flot ϕ est non nul si pour toute arête $e \in E$, $\phi(e) \neq 0$.

2.1.6 $[p, q]$-orientations et flots entiers

Un flot entier est un $\mathbf{Z}$-flot et pour tout entier $r \geq 2$ un r-flot entier est un flot entier à valeurs dans le segment $[1, r-1]$.

Soient deux entiers $0 \leq p \leq q$, une $[p, q]$-orientation est un flot entier à valeurs dans le segment $[p, q]$. Un graphe est $[p, q]$-orientable si et seulement s'il admet une $[p, q]$-orientation.

Soient deux entiers k et d tels que $0 < 2d \leq k$, un (k, d)-flot est une $[d, k-d]$-orientation. Un r-flot entier est évidemment un $(r, 1)$-flot.

2.1.7 Flots circulaires

Un flot circulaire est un $\mathbf{Q}$-flot à valeurs dans l'intervalle semi-ouvert $[1, +\infty[$. Pour tout rationnel $r \geq 2$ on appelle enfin r-flot ciculaire tout flot circulaire à valeurs dans le segment $[1, r-1]$.

2.2 Propriétés de base

On donne ici quelques propriétés élémentaires (mais pas forcément triviales) des flots. On adopte les notations suivantes : G est un graphe, $r \geq 2$ un rationnel et k et d deux entiers tels que $0 < 2d \leq k$. On note les propositions :

(i) G admet un r-flot entier

(ii) G admet un (k, d)-flot

(iii) G admet un r-flot circulaire

2.2.1 Relations entre flots

La proposition suivante est directe :

Proposition 1 *(ii)* $\iff$ *G admet un flot entier à valeurs dans* $[-k+d,-d]\cup[d,k-d]$.

Il est donc possible, lorsqu'on cherche un (k,d)-flot de travailler sur une orientation fixée d'un graphe sans restreindre la généralité.

On peut montrer :

Proposition 2 *(ii)* $\Longrightarrow$ *pour tous entiers positif k' et d' vérifiant* $\frac{k}{d} \leq \frac{k'}{d'}$, *G admet un* (k',d')*-flot.*

On en déduit facilement :

Proposition 3 *Si* $r = \frac{k}{d}$, *alors (ii)* $\iff$ *(iii).*
Si de plus r est un entier, alors (i) $\iff$ *(ii)* $\iff$ *(iii).*

Ainsi, si $r = \frac{k}{d}$, les notions de r-flot circulaire et de (k,d)-flot — ainsi que celle de r-flot entier si $r \in \mathbf{Z}$ — sont équivalentes, et on utilise le terme commun de r-flot.

2.2.2 Bornes et conjectures

Théorème 1 (Seymour [Sey80]) *Tout graphe sans isthme admet un 6-flot.*

Conjecture 1 (Tutte [Tut52]) *Tout graphe sans isthme admet un 5-flot.*

Théorème 2 (Jaeger [Jae76]) *Tout graphe 4-connexe admet un 4-flot.*

Conjecture 2 (Tutte, 1966) *Tout graphe 4-connexe admet un 3-flot.*

Théorème 3 (Gallucio et Goddyn [GG]) *Tout graphe 6-connexe admet un r-flot avec* $r < 4$.

2.2.3 Existence d'un minimum

Le théorème 1 montre en particulier que tout graphe sans isthme admet au moins un r-flot, $2 \leq r \leq 6$. Réciproquement, un graphe G comportant un isthme ne peut admettre de Γ-flot non nul : si $X \subset V$ est tel que $\partial(X) = \{e\}$, tout Γ-flot ϕ sur G vérifie $\phi(e) = 0$.

Soit G un graphe sans isthme, si on pose

$$\Phi_c(G) = \inf\{r \in [2,6]\ : G \text{ admet un } r\text{-flot circulaire}\}$$

on a par les propositions 2 et 3 :

Proposition 4 *G admet un r-flot* $\iff$ $r \geq \Phi_c(G)$.

$\Phi_c(G)$ est le *nombre de flot circulaire* de G.

La propriété suivante est démontrée par Goddyn, Tarsi et Zhang :

Proposition 5 ([GTZ]) *Pour tout graphe G sans isthme,* $\Phi_c(G)$ *est rationnel et G admet un* $\Phi_c(G)$*-flot circulaire.*

Chapitre 3

Valuations balancées

Dans cette partie, on étudie la notion de valuation balancée introduite par F. Jaeger dans [Jae75]. Dans [Ste], E. Steffen utilise implicitement le lemme 6 pour démontrer que $\Phi_c(P) = 5$, où P est le graphe de Petersen (voir figure 3.1).

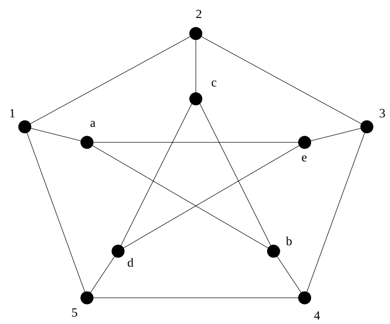

FIG. 3.1 – Le graphe de Petersen P

Le lemme 6 nous amène à définir des parties balancées vérifiant certaines propriétés, ce qui aboutit à une formule de calcul du nombre de flot circulaire pour les graphes cubiques vérifiant la conjecture du 5-flot (conjecture 1)

3.1 Définition et théorème

Jaeger introduit la notion de valuation balancée de la façon suivante :

Définition 1 (Valuation balancée) *Une valuation balancée w sur un graphe G est une fonction $w : V \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $X \subseteq V$*

$$|\Sigma_{v \in X} w(v)| \leq d(X) \tag{3.1}$$

Le théorème 4 relie les valuations balancées et les flots circulaires définis sur un graphe :

Théorème 4 (Jaeger [Jae75]) *Un graphe G est $[p,q]$-orientable (avec $0 < p < q$) si et seulement s'il existe une valuation balancée sur G vérifiant :*

$$\forall v \in V\ \exists k_v \in \mathbf{Z},\ k_v \equiv d(v) \pmod 2,\ w(v) = k_v \frac{q+p}{q-p} \tag{3.2}$$

On dit alors que w est une $\frac{q+p}{q-p}$-valuation.

3.2 Le cas des graphes cubiques

On étudie ici le cas particulier des valuations balancées définies sur des graphes cubiques.

3.2.1 Une version réduite du théorème 4

Pour tout $r \in \mathbf{Q}$ tel que $r > 2$, notons $\omega_r = \frac{r}{r-2}$.

Lemme 5 (Jaeger [Jae75]) *Pour tout $r > 2$, un graphe cubique G admet un r-flot si et seulement s'il existe une fonction $\sigma : V \longrightarrow \{-1,1\}$ telle que la fonction*

$$\begin{array}{rccc} w: & V & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ & v & \longmapsto & \sigma(v)\omega_r \end{array}$$

soit une valuation balancée sur G.

Preuve
Le sens «si» est un cas particulier du théorème 4 car si on écrit $r = 1 + \frac{q}{p}$, on a $\omega_r = \frac{q+p}{q-p}$. Pour le sens «seulement si», le théorème 4 prouve l'existence d'une valuation balancée w telle que

$$\forall v \in V\ \exists k_v \in \mathbf{Z},\ k_v \textit{ impair},\ w(v) = k_v\omega_r$$

et il suffit de voir que $|k_v| = 1$. Or pour tout $v \in V$ comme w est une valuation balancée, on a $|w(v)| \leq d(v) = 3$ *i.e.* $|k_v| \leq \frac{3}{\omega_r}$. Comme $\omega_r > 1$, cela force $|k_v| < 3$. □

3.2.2 Forme des valuations balancées

Lemme 6 *Soit G un graphe cubique et ω tel que $\omega > \frac{5}{3}$. Pour toute valuation balancée sur G de la forme $w(v) = \sigma(v)\omega$, si on note $A = \sigma^{-1}(1)$ et $B = \sigma^{-1}(-1)$, alors on a :*
- $|A| = |B|$
- $\Delta(G[A]) \leq 1$ *et* $\Delta(G[B]) \leq 1$

Le lemme 6 est une conséquence du résultat suivant, dont la preuve, donnée ci-dessous, est laissée en exercice par Jaeger dans [Jae75].

Lemme 7 (Jaeger [Jae75]) *Soit G un graphe cubique et $r > 2$. Pour toute valuation balancée sur G de la forme $w(v) = \sigma(v)\omega_r$, si on note $A = \sigma^{-1}(1)$ et $B = \sigma^{-1}(-1)$, alors on a :*
- $|A| = |B|$

– *A et B sont des forêts dont les composantes connexes comportent chacune au plus $\lfloor r \rfloor - 2$ éléments*

Preuve
Comme w est une valuation balancée : $\Sigma_{v\in V} w(v) = 0$ et donc $|A| = |B|$. Si par l'absurde A contient un cycle $C = (v_1, v_2, \ldots, v_j, v_1)$, on a $d(C) = j < \omega_r j = |\Sigma_{v\in C}(w(v))|$ ce qui contredit l'hypothèse sur w. Donc A et B sont des forêts. Soit alors T une composante connexe de A : T est un arbre et il est facile de voir que $d(T) = |T| + 2$ (en enracinant T, la racine est de degré 3 et ses fils éventuels sont des arbres binaires : alors $\partial(T)$ est l'ensemble des feuilles de T). Donc :

$$\begin{array}{rcl} |T|\omega_r & = & |\Sigma_{v\in T} w(v)| \\ & \leq & d(T) \\ & \leq & |T| + 2 \\ |T| & \leq & \dfrac{2}{\omega_r - 1} \\ & \leq & r - 2 \\ & \leq & \lfloor r \rfloor - 2 \end{array}$$

□

Le lemme 6 se déduit du lemme 7 avec $r < 5$.

3.2.3 Application

Dans [Ste], E. Steffen démontre que le nombre de flot circulaire du graphe de Petersen est exactement 5 :

Théorème 8 (Steffen [Ste]) $\Phi_c(P) = 5$

Preuve
Si par l'absurde P admet un r-flot avec $r < 5$, on a $\omega_r > \frac{5}{3}$. Par le théorème 4 il existe une ω_r-valuation w sur P . Le lemme 6 donne une partition (A, B) de V telle que $|A| = |B|$ et les composantes connexes de $G[A]$ et $G[B]$ comportent au plus deux éléments. Comme le cycle externe est impair, deux sommets parmi $(1, 2, 3, 4, 5)$, par exemple 1 et 2, appartiennent à la même classe, par exemple A. Alors 3,5,a et $c \in B$. Enfin d,b,e et $4 \in A$. Mais alors $|A| = 6$ et $|B| = 4$ ce qui contredit $|A| = |B|$. On a donc prouvé que $\Phi_c(P) \geq 5$.

Outre le fait que $\Phi_c(P) > 5$ contredirait la conjecture 1, il est facile de montrer que $\Phi_c(P) \leq 5$ en exhibant un 5-flot de P. Un tel flot est représenté en figure 3.2.

□

3.3 Parties ω-balancées

Le lemme 6 suggère la définition suivante :

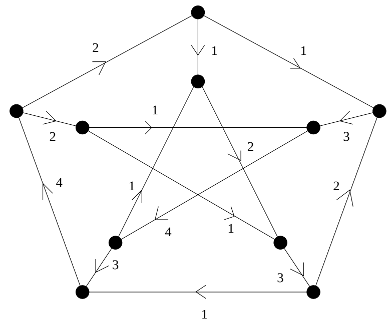

FIG. 3.2 – Un 5-flot sur P

Définition 2 (Partie ω-balancée) *Soit G un graphe, $A \subseteq V$ et $\omega \in \mathbf{R}$. On dit que A est ω-balancé si et seulement si $w(v) = \sigma_A(v)\omega$ est une valuation balancée sur G avec* $\sigma_A(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } v \in A \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

En particulier si G est cubique et $\omega > \frac{5}{3}$ le lemme 6 s'applique et toute partie $A \subseteq V$ ω-balancée vérifie :

$$|A| = \frac{|V|}{2},\ \Delta(G[A]) \leq 1 \text{ et } \Delta(G[V \setminus A]) \leq 1. \tag{3.3}$$

Lemme 9 *Soit G un graphe, $A \subseteq V$ et $\omega \in \mathbf{R}$. A est ω-balancé si et seulement si*

$$|\omega| \leq \min\left\{\frac{d(X)}{||X \cap A| - |X \setminus A||}; X \subseteq V \text{ et } |X \cap A| \neq |X \setminus A|\right\} \tag{3.4}$$

<u>Preuve</u>
A est ω-balancé si et seulement si $w(v) = \sigma_A(v)\omega$ est une valuation balancée sur G *i.e.*

$$\forall X \subseteq V,\ |\Sigma_{v \in X} w(v)| \leq d(X)$$

Comme

$$\Sigma_{v \in X} w(v) = (|X \cap A| - |X \setminus A|)\omega$$

cela équivaut à

$$\forall X \subset V,\ |X \cap A| \neq |X \setminus A| \Longrightarrow |\omega| \leq \frac{d(X)}{||X \cap A| - |X \setminus A||}$$

□

Théorème 10 *Soit G un graphe cubique sans isthme tel que $\Phi_c(G) < 5$,*

$$\omega_{\Phi_c} = \max_{A \in \mathfrak{C}_G} \min_{|X \cap A| \neq |X \setminus A|} \frac{d(X)}{||X \cap A| - |X \setminus A||} \tag{3.5}$$

où $\mathfrak{C}_G = \{A \subset V\ ;\ A$ vérifie (3.3)$\}$

Preuve
Notons $\mathfrak{F} = \{\min_{|X\cap A|\neq|X\setminus A|} \frac{d(X)}{||X\cap A|-|X\setminus A||}\,;\, A \in \mathfrak{C}_G\}$. Le lemme 9 montre que

$$\mathfrak{F} \subseteq \{\omega\,;\text{ il existe une }\omega\text{-valuation sur }G\} \tag{3.6}$$

Comme

$$\omega_{\Phi_c(G)} = \max\{\omega\,;\text{ il existe une }\omega\text{-valuation sur }G\} \tag{3.7}$$

il suffit de vérifier : $\omega_{\Phi_c(G)} \in \mathfrak{F}$. Par le lemme 5 il existe une partie ω_{Φ_c}-balancée A de V or $\Phi_c < 5$ implique $\omega_{\Phi_c} > \frac{5}{3}$ et donc le lemme 6 s'applique et $A \in \mathfrak{C}_G$. Par le lemme 9, il existe donc $\omega \in \mathfrak{F}$ tel que $\omega_{\Phi_c(G)} \leq \omega$. Avec (3.6) et (3.7), cela force $\omega_{\Phi_c(G)} = \omega \in \mathfrak{F}$. $\square$

Pour appliquer le théorème 10, il est nécessaire de démontrer que $\Phi_c(G) < 5$. Le théorème suivant permet de s'en affranchir.

Théorème 11 *Soit G un graphe cubique tel que $\mathfrak{C}_G \neq \emptyset$ et $\Phi = \Phi_c(G)$ et soit $\omega(G)$ la quantité :*

$$\omega(G) = \max_{A\in\mathfrak{C}_G} \min_{|X\cap A|\neq|X\setminus A|} \frac{d(X)}{||X\cap A|-|X\setminus A||} \tag{3.8}$$

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\omega(G) > \frac{5}{3} \iff \Phi < 5$ *et dans ce cas* $\omega_\Phi = \omega(G)$

(ii) $\omega(G) \leq \frac{5}{3} \iff \Phi \geq 5$ *et dans ce cas* $\omega(G) \leq \omega_\Phi \leq \frac{5}{3}$

Preuve
Pour (i) : si $\Phi < 5$ le théorème 10 prouve $\omega(G) = \omega_\Phi = \frac{\Phi}{\Phi-2} > \frac{5}{3}$. Réciproquement, si $\omega(G) > \frac{5}{3}$ alors il existe $A \in \mathfrak{C}_G$ tel que

$$\omega(G) = \min_{|X\cap A|\neq|X\setminus A|} \frac{d(X)}{||X\cap A|-|X\setminus A||}$$

Le lemme 9 prouve que A est une partie $\omega(G)$-balancée et donc que

$$\begin{array}{rccc} w: & V & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ & v & \longmapsto & \sigma_A(v)\omega(G) \end{array}$$

est une $\omega(G)$-valuation. Le théorème 4 prouve l'existence d'un r-flot, avec $r = \frac{2\omega(G)}{\omega(G)-2} < 5$ et donc $\Phi < 5$.
L'équivalence dans (ii) est la contraposée de celle dans (i) et il suffit donc de démontrer l'encadrement. Supposons que $\Phi \geq 5$, alors $\omega_\Phi \leq \frac{5}{3}$ est direct. Avec le lemme 9 et le théorème 4 on démontre comme précédemment l'existence d'un $\frac{2\omega(G)}{\omega(G)-2}$-flot, ce qui force $\Phi \leq \frac{2\omega(G)}{\omega(G)-2}$ et donc $\omega_\Phi \geq \omega(G)$. $\square$

Remarque 1 Si on suppose la conjecture 1 démontrée pour les graphes cubiques, (ii) devient :

$$\omega(G) \leq \frac{5}{3} \iff \Phi = 5$$

On dispose donc d'une formule de calcul du nombre de flot circulaire pour les graphes cubiques sans isthme.

Chapitre 4

Snarks de Loupekhine

4.1 Préliminaires

On utilise la définition minimale des snarks :

Définition 3 *Un snark est un graphe cubique non 3-arête-coloriable* i.e. *dont on ne peut pas colorier les arêtes avec trois couleurs de telle sorte que deux arêtes incidentes à un même sommet reçoivent toujours des couleurs distinctes.*

On peut montrer les propriétés suivantes :

Proposition 6 *Un graphe cubique est 3-arête-coloriable si et seulement si il admet un 4-flot.*

Proposition 7 *P est l'unique plus petit snark.*

Proposition 8 *Soit G un graphe cubique et soit $C \subseteq E(G)$ une coupe. S'il existe un 3-arête-coloriage de G et si on note C_1, C_2 et C_3 les composantes monochromatiques correspondantes, alors $|C_1|$, $|C_2|$ et $|C_3|$ ont la même parité.*

4.2 La méthode de construction

Loupekhine a proposé une méthode pour créer des snarks à partir d'autres snarks.

Soit S un snark et $\mu = [xyz]$ un chemin dans S. En supprimant les semi-arêtes liées à x, y et z dans S on obtient un eunegraphe avec cinq semi-arêtes que nous appelerons eunesnark. Un exemple de ce procédé est donné en figure 4.1. Cet eunesnark est noté S_μ et on le schématise comme en figure 4.2 en ne représentant que les semi-arêtes.

On note s_1 et s_2 les semi-arêtes auparavant dirigées vers x, s_3 celle vers y et s_4 et s_5 celles vers z. On démontre alors la propriété :

Proposition 9 *Soit G un graphe cubique contenant l'eunesnark S_μ. S'il existe un 3-arête-coloriage de G, noté f, alors l'une ou l'autre de ces deux propositions est vraie :*

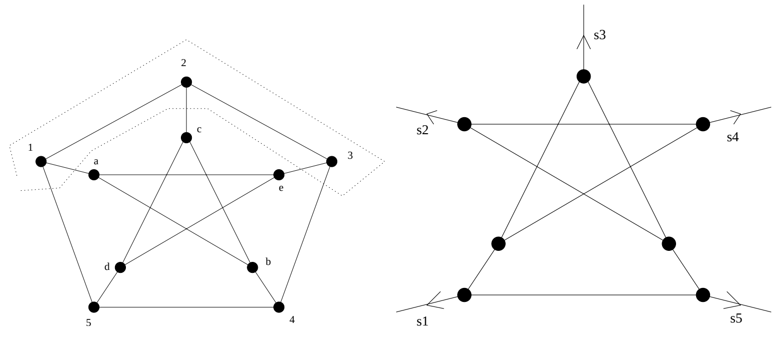

FIG. 4.1 – Le graphe P de Petersen et l'eunesnark P' obtenu à partir de P en supprimant le chemin $\mu = [123]$.

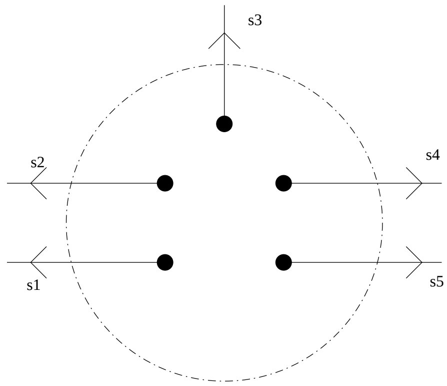

FIG. 4.2 – On schématise tout eunesnark en ne faisant figurer que les semi-arêtes de liaison.

- $f(s_1) = f(s_2)$ *et* $f(s_4) \neq f(s_5)$ *(cas 1)*
- $f(s_1) \neq f(s_2)$ *et* $f(s_4) = f(s_5)$ *(cas 2)*

Preuve
D'après la proposition 8 on a forcément trois semi-arêtes de la même couleur et les deux autres des deux couleurs restantes. Cela interdit d'avoir simultanément $f(s_1) = f(s_2)$ et $f(s_4) = f(s_5)$. Si on avait $f(s_1) \neq f(s_2)$ et $f(s_4) \neq f(s_5)$ on en déduirait facilement un 3-arête-coloriage de S. $\square$

Soient alors $S_1, \dots, S_{2k+1}$ des snarks et $S'_1, \dots, S'_{2k+1}$ des eunesnarks associés. On construit un nouveau graphe de la façon suivante :
- pour tout i, on relie $s_4(S'_i)$ et $s_5(S'_i)$ à $s_1(S'_{i+1 \pmod{2k+1}})$ et $s_2(S'_{i+1 \pmod{2k+1}})$, en croisant ou non les arêtes ;
- on complète T en un graphe cubique.

Un exemple est donné en figure 4.3.

Proposition 10 *Tout graphe T ainsi construit est un snark.*

Preuve

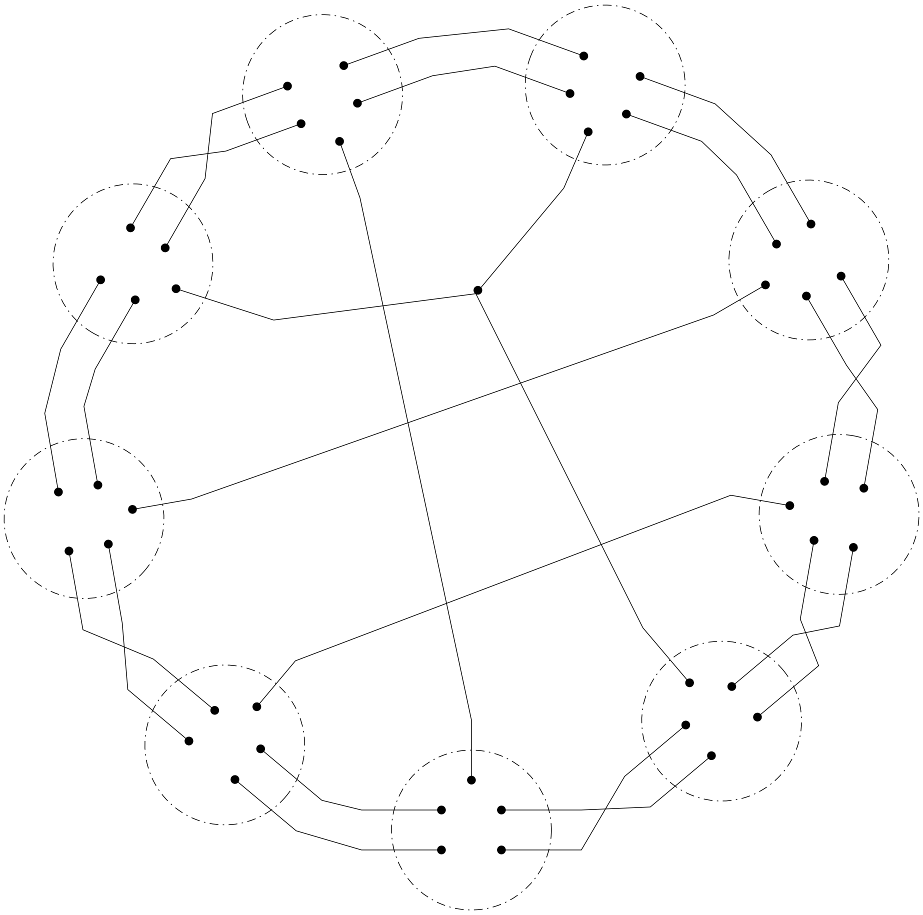

FIG. 4.3 – Un snark de Loupekhine

Si par l'absurde il existe un 3-arête-coloriage de T, la proriété 9 s'applique et par exemple, le cas 1 s'applique à S'_1. Comme on a relié $s_4(S'_1)$ et $s_5(S'_1)$ à $s_1(S'_2)$ et $s_2(S'_2)$, le cas 2 s'applique à S'_2. Plus généralement, on peut associer à chaque eunesnark un entier 1 ou 2, et la façon de relier les eunesnarks entre eux force chaque eunesnark à être dans un cas différent de celui de ses deux voisins : on a donc un 2-coloriage d'un cycle impair, ce qui est impossible. $\square$

Les snarks ainsi construits sont appelés snarks de Loupekhine ou L-snarks.

4.3 Un cas particulier

Dans la suite nous nous intéresserons particulièrement aux snarks de Loupekhine formés à partir de copies du graphe de Petersen P. Le type des eunesnarks P' utilisés est représenté en figure 4.1. Les L-snarks formés à partir de copies d'eunesnarks P' sont appelés LP-snarks.

De plus, on précise ici la deuxième étape de la méthode, qui consiste à relier les semi-arêtes $s_3(P'_i)$ à d'autres objets pour obtenir un graphe cubique. Pour

cela, on construit une suite $(u_i)_{1\leq i\leq r}$ telle que :
- $u_1 = 1$ et $u_r = 2k+2$;
- pour tout i tel que $1 \leq i < r$, $u_{i+1} - u_i \in \{2,3\}$.

On pose $P'_{2k+2} = P'_1$. Ensuite, pour tout i tel que $1 \leq i < r$, si $u_{i+1} = u_i + 2$ on relie les semi-arêtes $s_3(P'_{u_i})$ et $s_3(P'_{u_i+1})$. Sinon, $u_{i+1} = u_i + 3$ et on ajoute un sommet, que l'on relie aux semi-arêtes $s_3(P'_{u_i})$, $s_3(P'_{u_i+1})$ et $s_3(P'_{u_i+2})$.

Remarque 2 Il existe forcément un i pour lequel $u_{i+1} = u_i + 3$ car $u_r - u_1 = 2k+1$ est impair.

Les LP-snarks ainsi construits sont appelés LP_0-snark. Un exemple de LP_0-snark est donné en figure 4.4.

Remarque 3 On peut aussi définir des L_0-snarks de la même façon que les LP_0-snarks sans spécifier la forme des eunesnarks.

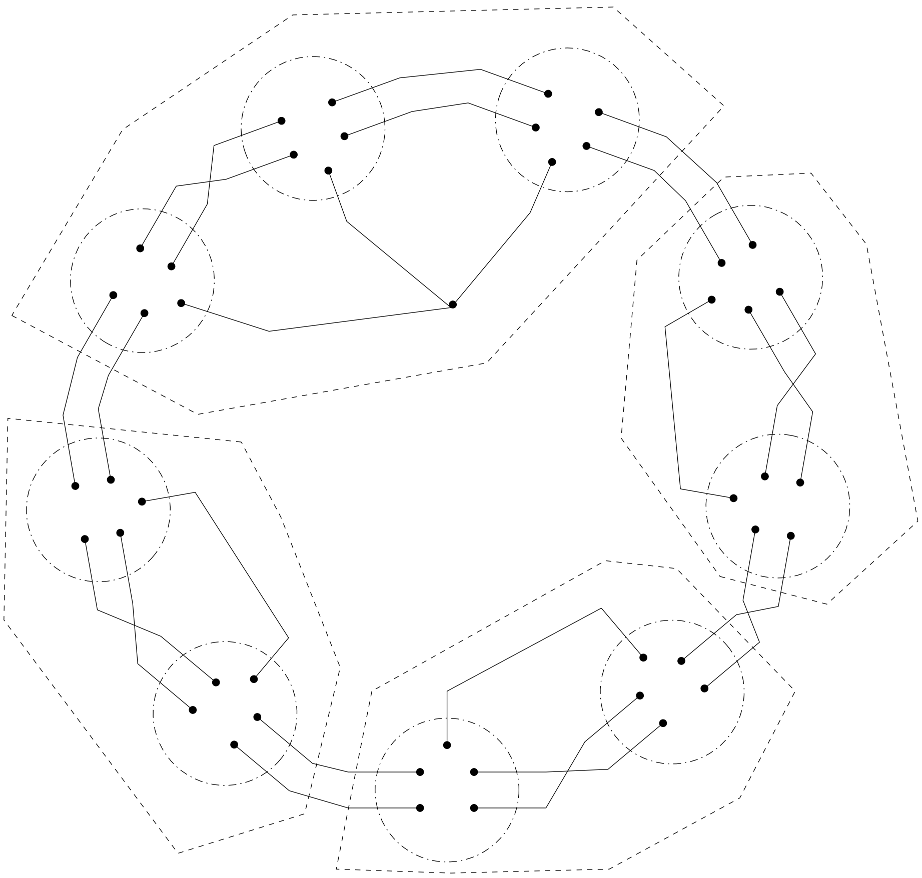

FIG. 4.4 – Un LP_0-snark

4.4 Etude des LP_0-snarks

L'objet de cette section est de démontrer que tout LP_0-snark admet un $\frac{9}{2}$-flot

4.4.1 Widgets

De façon évidente, tout LP_0-snark peut être décomposé en widgets de deux types, 2-widget et 3-widget, formés respectivement de deux et trois eunesnarks P'. Ces deux types sont représentés en figures 4.5 et 4.6, avec les conventions pour les noms et les orientations de leurs arêtes et semi-arêtes.

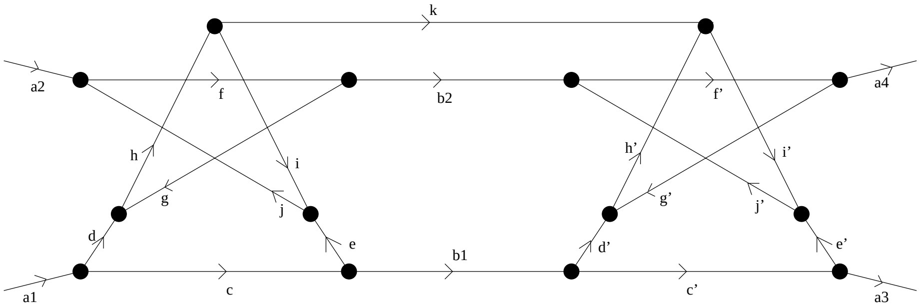

FIG. 4.5 – Un 2-widget

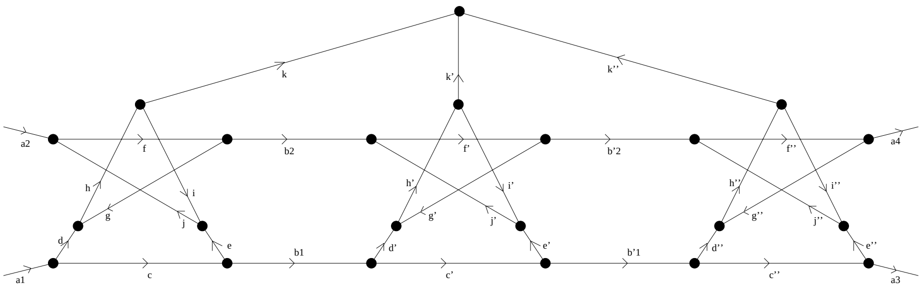

FIG. 4.6 – Un 3-widget

Il existe deux 2-widgets et quatre 3-widgets, obtenus en croisant ou non les arêtes de liaison b.

4.4.2 Réduction

L'idée est de fixer un entier $\alpha \in [2,7]$ et de chercher un flot ϕ sur un 2-widget vérifiant

$$\phi(a_1) = \phi(a_2) = \phi(a_3) = \phi(a_4) = \alpha \tag{4.1}$$

et

$$\phi(b_1) = \phi(b_2) \tag{4.2}$$

et un flot sur un 3-widget vérifiant (4.1), (4.2) et

$$\phi(b'_1) = \phi(b'_2) \tag{4.3}$$

Ce flot reste alors valable en croisant ou décroisant les arêtes b et on obtient un flot sur chaque widget et qui vaut α sur toutes les arêtes a. Du fait de l'orientation des arêtes a et de la façon dont on relie les eunesnarks, on obtient alors un flot sur tout LP_0-snark.

4.4.3 Résolution

En écrivant les équations du flot pour tous les sommets, on obtient un système d'équations linéaires, qu'on simplifie avec (4.1), (4.2) et éventuellement (4.3). On applique la méthode du pivot et on cherche une solution pour laquelle toutes les variables appartiennent à $\mathbf{N} \cap ([-7,-2] \cup [2,7])$, ce qui donne bien un $(9,2)$-flot d'après la propriété 1.

Une solution pour $\alpha = 2$ est présentée en figures 4.7 et 4.8.

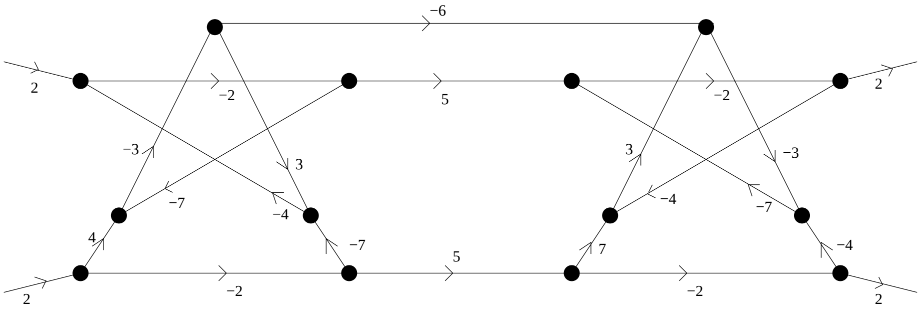

FIG. 4.7 – Un $\frac{9}{2}$-flot sur un 2-widget avec $\alpha = 2$

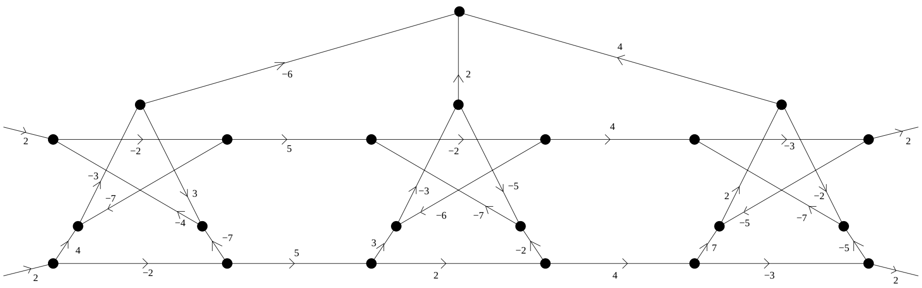

FIG. 4.8 – Un $\frac{9}{2}$-flot sur un 3-widget avec $\alpha = 2$

Théorème 12 *Tout LP_0-snark S admet un $\frac{9}{2}$-flot et vérifie donc :*

$$4 < \Phi_c(S) \leq \frac{9}{2}$$

Chapitre 5

Pistes...

5.1 Les LP_1-snarks

Les LP-snarks semblent être trop généraux pour obtenir un résultat semblable au théorème 12 (il existe même des LP-snarks comportant des isthmes et donc sur lesquels il n'existe pas de flot non nul). On peut toutefois étudier une famille légèrement moins restrictive que les LP_0-snarks. En effet, on les généralise de la façon suivante :

5.1.1 Construction des LP_1-snarks

Dans la construction de Loupekhine, lorsqu'on complète les eunesnarks joints en un graphe cubique, on peut relier les semi-arêtes s_3 par deux ou par trois comme pour les LP_0-snarks mais sans imposer de relier des eunesnarks consécutifs. On partitionne l'ensemble $\{1, \ldots, 2k+1\}$ en parties à deux ou trois éléments. Pour chaque paire $\{i, j\}$ on relie $s_3(P'_i)$ et $s_3(P'_j)$ et pour chaque tierce $\{i_1, i_2, i_3\}$ on crée un nouveau sommet auquel on relie $s_3(P'_{i_1})$, $s_3(P'_{i_2})$ et $s_3(P'_{i_3})$. Un LP-snark ainsi construit est appelé un LP_1-snark. Il est clair que tout LP_0-snark est un LP_1-snark.

Remarque 4 Comme pour les LP_0- et les L_0-snarks, on peut définir des L_1-snarks en spécifiant la méthode de construction comme ci-dessus sans préciser la forme des eunesnarks. Le L-snark donné en figure 4.3 est un L_1-snark. Les L_1-snarks sont en fait la version originale des snarks de Loupekhine tels que présentés dans [HS93]. On peut toutefois observer que la construction plus générale des L-snarks n'enlève rien à la «snarkitude» des graphes obtenus.

5.1.2 Extension du théorème 12 ?

Les LP_1-snarks restent une famille plus générale que les LP_0-snarks. En particulier, on ne peut plus les décomposer en 2-widgets et 3-widgets. On ne peut pas appliquer la méthode de la section 4.4 sur ce qu'on pourrait appeler des 1-widgets — en fait les eunesnarks P' — car si on cherche un flot sur P' vérifiant $\phi(s_1) = \phi(s_2) = -\phi(s_4) = -\phi(s_5)$ alors on a forcément $\phi(s_3) = 0$. On impose donc des contraintes trop fortes pour trouver un flot.

On peut espérer trouver un moyen d'étendre le théorème 12 en assouplissant ces contraintes. La section suivante présente une voie de recherche basée sur la notion du graphe L-réduit. Elle semble toutefois pouvoir s'appliquer aux LP-snarks dont le graphe L-réduit est 2-connexe et non aux seuls LP_1-snarks.

5.2 Graphe L-réduit

La construction de Loupekhine se décompose en deux étapes :
- la construction d'un assemblage circulaire de $2k+1$ snarks, qui est à l'origine de la «snarkitude» du graphe obtenu ;
- une complétion autour des semi-arêtes centrales, qui produit un graphe cubique.

L'idée qui se cache derrière la notion de graphe L-réduit, c'est de capturer l'essence de cette deuxième étape en ramenant les eunesnarks à un cycle de longueur $2k+1$.

Soit donc un L-snark S obtenu à partir de $2k+1$ eunesnarks et S' l'eunegraphe issu de la première étape de construction de S. Soit C_{2k+1} le cycle de longueur $2k+1$ et C'_{2k+1} l'eunegraphe déduit de C_{2k+1} en ajoutant une semi-arête à chaque sommet du cycle. Le graphe L-réduit de S est obtenu en complétant l'eunegraphe C'_{2k+1} de la même manière que pour obtenir S à partir de S'.

Plus simplement, partant de S, on ne conserve de chaque eunesnark S_j ($1 \leq j \leq 2k+1$) que le sommet v_j lié à la semi-arête centrale s_3, et on relie ces sommets par le cycle $(v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}, v_1)$. Le graphe L-réduit du L-snark de la figure 4.3 est représenté en figure 5.1

En trouvant un flot sur le graphe L-réduit, on peut espérer pouvoir l'étendre au L-snark initial. Pour cela, il faut savoir quels flots partiels sont disponibles sur les eunesnarks utilisés. On peut alors essayer de trouver un flot sur le L-snark tel que la somme des flots sur les arêtes liant deux eunesnarks soit égale au flot sur l'arête correspondante sur le cycle. Précisons cette idée :

5.3 Extension d'un flot du graphe L-réduit

Pour tout j tel que $1 \leq j \leq 2k+1$ notons t_i l'arête du cycle liant v_j à $v_{j+1 \pmod{2k+1}}$, orientée du premier vers le second. Soit ϕ un flot sur le graphe L-réduit. Si pour tout j on trouve un flot partiel ϕ_j sur S'_j tel que les équations :

$$\phi_j(s_1(S'_j)) + \phi_j(s_2(S'_j)) = -\phi(v_{j-1 \pmod{2k+1}}) \tag{5.1}$$

$$\phi_j(s_4(S'_j)) + \phi_j(s_5(S'_j)) = \phi(v_j) \tag{5.2}$$

et

$$\phi_j(s_3(S'_j)) = \phi(v_{j-1 \pmod{2k+1}}) - \phi(v_j) \tag{5.3}$$

soient vérifiées, alors le flot ϕ sur le graphe L-réduit privé du cycle et les flots partiels sur les eunesnarks définissent un flot sur le L-snark initial.

Pour touver un r-flot sur un L-snark on cherche ainsi à compléter de façon convenable un r-flot du graphe L-réduit. Pour un eunesnark S' donné, on s'intéresse donc aux valeurs $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ telles qu'il existe un r-flot ϕ sur S' vérifiant

$$\forall i,\ \phi(s_i) = \sigma_i \tag{5.4}$$

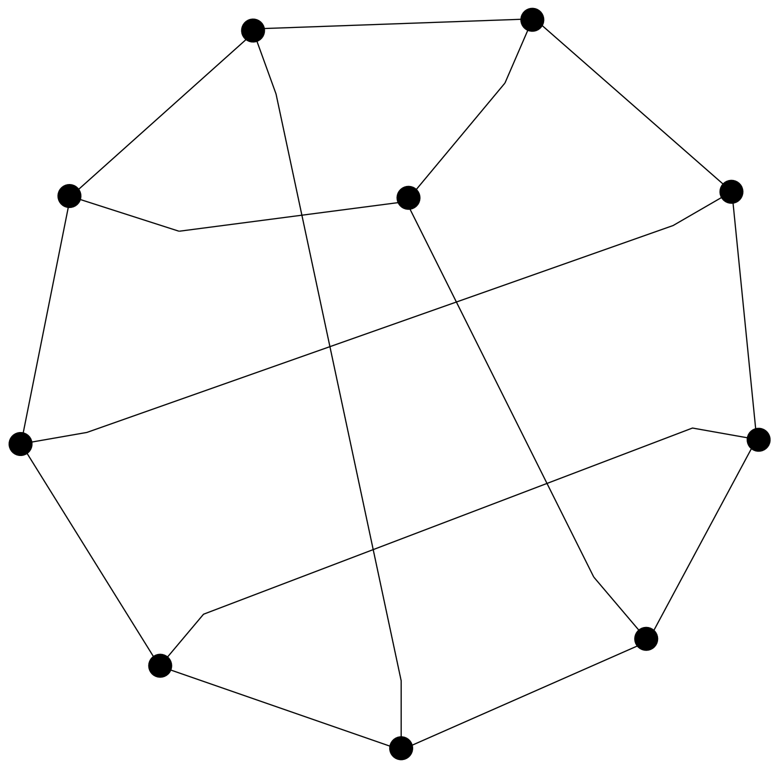

FIG. 5.1 – Le graphe L-réduit du L-snark de la figure 4.3

En particulier, on peut essayer de voir si pour tout $(\sigma_i)_{1\leq i\leq 5}$ vérifiant

$$\forall i,\ d \leq |\sigma_i| \leq k-d \tag{5.5}$$

et

$$\sum_{i=1}^{5} \sigma_i = 0 \tag{5.6}$$

on peut trouver un (k,d)-flot vérifiant (5.4).

Ce n'est pas le cas pour les LP-snarks en général. On peut cependant espérer obtenir des résultats significatifs en imposant des contraintes supplémentaires au flot de graphe L-réduit et en s'intéressant aux classes de L- ou LP-snarks dont le graphe réduit respecte ces contraintes.

Bibliographie

[GG] Anna Galluccio and Luis A. Goddyn. The circular flow number of a 6-edge connected graph is less than four. URL : `http://citeseer.nj.nec.com/292079.html`.

[GTZ] Luis A. Goddyn, Michael Tarsi, and Cun-Quan Zhang. On (k,d)-colorings and fractional nowhere zero flows. URL : `http://citeseer.nj.nec.com/goddyn93kdcoloring.html`.

[HS93] D. A. Holton and J. Sheehan. *The Petersen Graph*, chapter 3. Number 7 in Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, April 1993.

[Jae75] François Jaeger. Balanced valuations and flows in multigraphs. *Proceedings of the american mathematical society*, 55(1) :237–242, June 1975.

[Jae76] François Jaeger. Flows and generalized coloring theorems in graphs. *Journal of combinatorial theory, Series B*, 26 :205–216, July 1976.

[Sey80] P. D. Seymour. Nowhere-zero 6-flows. *Journal of combinatorial theory, Series B*, 30 :130–135, March 1980.

[Ste] Eckhard Steffen. Circular flow numbers of regular multigraphs. URL : `http://citeseer.nj.nec.com/steffen99circular.html`.

[Tut52] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Can. J. Math.*, 6 :80–91, October 1952.

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à André Raspaud pour l'ouverture du sujet qu'il m'a proposé et pour son accueil, son aide, ses livres ... et ses indispensables conseils sur le Bordeaux gastronomique.

Je tiens également à remercier les intervenants et les participants du groupe de travail de graphes pour la diversité des exposés et l'émulation qui règne dans ces réunions.

Merci enfin à Aurélien Moreau pour son point de vue extérieur toujours rafraîchissant.