AGRÉGATION EXTERNE DE MATHÉMATIQUES
Géométries affine, euclidienne et projective

Luisa Paoluzzi

Dans ce chapitre on va essayer de couvrir la partie de programme de l'agrégation contenue dans la section 9.5 (voir rapport 2010) que voici :

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux. Projection sur un convexe fermé.

2. Droite projective réelle ou complexe : groupe des homographies, birapport.

3. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements et antidéplacements. Décomposition commutative en une translation et une isométrie à point fixe (forme dite réduite). Exemple de générateurs du groupe des isométries : décomposition en produit de réflexions.

4. Espace affine euclidien de dimension 2*. Classification des isométries. Similitudes directes et indirectes. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.*

5. Espace affine euclidien de dimension 3*. Rotations. Vissages. Groupe des isométries laissant stable une partie de l'espace.*

6. Coniques et quadriques. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3*. Classification des coniques. Intersection de quadriques et résultant. Propriétés géométriques (affines et métriques) des coniques. Définition par foyer et directrice, définition bifocale.*

Les leçons d'oral concernées sont :

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications en dimensions 2 *et* 3*.*

Coniques. Applications.

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

Homographies de la droite projective complexe. Applications.

Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 *ou* 3*.*

Résultant de deux polynômes, applications à l'intersection de courbes ou de surfaces algébriques.

et de façon plus indirecte :

Sous-groupes finis de $O(2,\mathbb{R})$ *et de* $O(3,\mathbb{R})$*. Applications.*

Groupe des nombres complexes de module 1*. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.*

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Applications des nombres complexes à la géométrie.

Utilisation des groupes en géométrie.

Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Ces notes sont basées sur un "cours de géométrie affine et euclidienne pour l'agrégation" rédigé par Pierre Bousquet (merci Pierre !) et mes anciennes notes sur les mêmes arguments mais pour l'agrégation interne. Personnellement, je suis très peu les livres et mes sources sont extrêmement hétérogènes. J'encourage les agrégatifs à passer du temps dans une bibliothèque afin de choisir les textes qu'ils préfèrent, en tenant compte que désormais aucun livre n'est interdit pendant le concours et que l'originalité paye !

Géométrie affine

Espaces affines : définition, caractérisations et premières propriétés

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. Soit E un ensemble. On dit que $E \neq \varnothing$ est un *espace affine de direction* V *(ou associé à* V*)* s'il existe une application $E \times E \longrightarrow V$, $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ satisfaisant :

pour tous $x, y, z \in E$ $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles),

pour tout $x \in E$ et $v \in V$ il existe un unique $y \in E$ tel que $v = \overrightarrow{xy}$.

On appelle *points* les éléments de E et vecteurs ceux de V. La *dimension de* E coïncide avec la dimension de V (qu'on va supposer finie).

Cette définition est celle que l'on propose le plus souvent à l'école. Elle est équivalente à la suivante : E est un espace affine de direction V si et seulement s'il existe une action du groupe additif $(V, +)$ sur E, $(v, x) \mapsto x + v$, qui est simplement transitive.

On rappelle qu'un *groupe* G *agit sur un ensemble* X s'il existe une application $G \times X \longrightarrow X$ définie par $(g, x) \mapsto gx$ et telle que $(hg)x = h(gx)$ pour tous $h, g \in G$ et $x \in X$, et $e_G x = x$ pour tout $x \in X$, où e_G est l'élément neutre de G. Ceci revient à donner un morphisme ρ (*une représentation*) du groupe G à valeurs dans le groupe des bijections de X.

On rappelle, par ailleurs, qu'une action est *transitive* si elle a une unique orbite, à savoir pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $y = gx$; si, de plus, g est unique on dit que l'action est *simplement transitive*. Ceci revient à demander que les stabilisateurs des points sont réduits au sous-groupe trivial $\{e_G\}$. On remarquera que ceci entraîne que la représentation est *fidèle* (à savoir, ρ est injectif).

Exercice 1. Montrer que les définitions données sont équivalentes. Montrer ensuite les propriétés élémentaires suivantes :

1. $\overrightarrow{xy} = 0$ si et seulement si $x = y$; $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$.

2. $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$ si et seulement si $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$ (relation du parallélogramme pour x, y, t, z). Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas 2, on définit le *milieu* de deux points $x, y \in E$ comme le point $x + \overrightarrow{xy}/2$. Montrer que le milieu de x, y coïncide avec le milieu de y, x. Montrer ensuite que quatre points x, y, z, t forment un parallélogramme (i.e. satisfont la relation du parallélogramme) si et seulement si les milieux de x, z et de y, t sont les mêmes.

3. Tout espace vectoriel V est un espace affine de façon naturelle : en donner la définition et montrer que les axiomes sont vérifiés. Il s'agit là des exemples les plus simples d'espaces affines.

4. Si E est un espace affine et $x_0 \in E$ alors on peut définir sur E une structure d'espace vectoriel de la façon suivante : $x + y = z$, où z est l'unique point de E tel que $\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y} = \overrightarrow{x_0z}$, et $\lambda x = x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0x}$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel qui ne dépend pas du choix de x_0, à isomorphisme près (cette espace est isomorphe à la direction de E). En observant que l'espace affine associé à l'espace vectoriel qu'on vient de définir sur E est encore E, on voit bien que les exemples vus au point précédent sont en réalité tous les exemples possibles d'espace affine.

Sous-espaces affines

Un sous-ensemble F non vide de E est un *sous-espace affine* de E si l'image de la restriction de $E \times E \longrightarrow V$ à $F \times F$ est un sous-espace vectoriel W de V et la restriction satisfait les axiomes vus. Dans ce cas F devient un espace affine de direction W. On remarquera que le premier axiome est toujours vérifié (trivialement), mais que le deuxième est essentiel, c'est-à-dire qu'il y a des sous-ensembles d'E tels que l'image de la restriction de $E \times E \longrightarrow V$ est un sous-espace vectoriel, mais le sous-espace n'a pas structure d'espace affine. C'est le cas, par exemple, des demi-droites : en effet on doit avoir que pour tout $f \in F$ les restrictions $\{f\} \times F \longrightarrow W$ et $F \times \{f\} \longrightarrow W$ sont surjectives.

Soient F et F' deux sous-espaces affines de E associés aux sous-espaces vectoriels W et W' de V. F est *parallèle* à F' (ou F et F' sont *faiblement parallèles*) si $W \subset W'$. On remarque que la relation "être faiblement parallèles" est symétrique par construction (à savoir, peu importe qui est inclus dans quoi), en revanche, la relation "être parallèles" ne l'est pas, mais elle le devient si on ne considère des sous-espaces affines de la même dimension. Dans la suite on va plutôt privilégier la relation non symétrique, car elle est plus précise. On appelle *point* un (sous-)espace affine de dimension 0, *droite* un (sous-)espace affine de dimension 1, et *plan* un (sous-)espace affine de dimension 2. Un *hyperplan* de E est un sous-espace affine de E de dimension $\dim(E) - 1$. Parfois on considère $\varnothing$ comme (un sous-espace affine) ayant dimension -1 : cela a l'avantage de permettre une simplification des énoncés. On remarquera qu'un point entendu comme (sous-)espace affine contient un seul point entendu comme élément, il y a donc une petite ambiguïté dans la définition du mot "point".

Exercice 2. Soit E un espace affine de direction V. Montrer qu'un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace affine si et seulement si $F = x + W$, où $x \in F$ et $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel. Montrer que les sous-espaces affines de $E = V = \mathbb{K}^n$ considéré avec sa structure affine naturelle coïncident avec les ensembles de solutions de systèmes linéaires, non nécessairement homogènes (lorsqu'ils sont non vides). Remarquer que les ensembles des solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires sont des (sous-)espaces affines.

Dans la pratique, on préfère parler de *sous-espaces affines de* V lorsqu'ils ne contiennent pas le zéro de V et de *sous-espaces vectoriels (ou linéaires)* s'ils le contiennent (à savoir s'ils le sont !).

Exercice 3. Soit E un espace affine de dimension n.

1. Soient F et F' deux sous-espaces affines de E de dimensions d et d' respectivement. Montrer que $F \cap F'$ est un sous-espace affine de E s'il n'est pas vide. Montrer, plus généralement que cela est le cas pour une intersection arbitraire, non vide, d'espaces affines. Utiliser cela pour montrer qu'il existe un plus petit sous-espace affine $\mathcal{A}(A)$ de E contenant un sous-ensemble $A \subset E$ donné, non vide. Déduire qu'il existe un plus petit sous-espace affine de E contenant F et F'. Déterminer une formule de dimension. Déduire que si $W + W' = V$, où W et W' sont les directions de F et F' respectivement, alors $F \cap F' \neq \varnothing$.

2. On considère $F \cup F'$: sous quelle condition cet ensemble est il un sous-espace affine ? (Dans cette question la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas égale à 2).

3. Soit H un hyperplan affine de E. Soit $F \neq \varnothing$ un sous-espace affine de E de dimension d, non parallèle à H. Montrer que $H \cap F$ est un sous-espace affine non vide de dimension $d - 1$.

4. Montrer que deux hyperplans $H \neq H'$ de E sont parallèles si et seulement s'ils sont disjoints.

5. Supposons $F \cap F' = \varnothing$ et $d' = \dim F' \leq d = \dim F$. Montrer que F' est parallèle à F si et seulement s'il existe un sous-espace affine G de E de dimension $d + 1$, qui contient F et F'.

6. Montrer que par un point donné de E passe un seul sous-espace affine parallèle à un sous-espace affine F et de même dimension.

7. Montrer que quatre points non alignés forment un parallélogramme si et seulement s'ils sont intersection de deux droites parallèles avec deux autres droites parallèles.

8. Soient A un sous-ensemble non vide d'un espace affine E et $a_0 \in A$. Montrer que si $\dim(\mathcal{A}(A)) = k$ on peut trouver des points $a_1, \ldots, a_k \in A$ tels que $\mathcal{A}(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \mathcal{A}(A)$.

9. On suppose que la caractéristique du corps n'est pas 2. Montrer qu'un sous-ensemble A de E est un sous-espace affine si et seulement si pour tous $x, y \in A$ distincts la droite par x et y est contenue dans A. Plus généralement, montrer que cela est le cas si le corps a au moins trois éléments. Montrer que la condition sur le corps est nécessaire.

Repères affines

Soit E un espace affine de dimension n. Un *repère affine* est une famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $n+1$ points de E tels que $\overrightarrow{x_0x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_n}$ est une base de V. De façon équivalente, un repère affine est déterminé par un point $x_0 \in E$ et une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V. On appelle x_0 *origine du repère*. Il est immédiat de voir qu'en permutant les éléments d'un repère affine on obtient un nouveau repère affine. En effet, si la permutation laisse x_0 inchangé cela revient à permuter les éléments d'une base. Sinon, on peut supposer que la permutation échange x_0 et x_i et laisse fixes les autres points. On a alors les vecteurs $\overrightarrow{x_ix_0}, \overrightarrow{x_ix_1}, \ldots \overrightarrow{x_ix_{i-1}}, \overrightarrow{x_ix_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{x_ix_n}$ qui correspondent à : $-\overrightarrow{x_0x_i}, \overrightarrow{x_0x_1} - \overrightarrow{x_0x_i}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_{i-1}} - \overrightarrow{x_0x_i}, \overrightarrow{x_0x_{i+1}} - \overrightarrow{x_0x_i}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_n} - \overrightarrow{x_0x_i}$ et la conclusion est claire. Étant donné un repère affine, tout point $x \in E$ s'écrit de façon unique comme $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ étant les *coordonnées du point par rapport au repère*. Un ensemble de k points est dit *affinement libre* s'il est un repère affine du sous-espace affine qu'il engendre.

Exercice 4.

1. Étant donné deux repères affines, déterminer comme on passe de l'un à l'autre (i.e. déterminer comment changent les coordonnées d'un point).

2. Un repère affine étant fixé, déterminer une description paramétrée et une description cartésienne des sous-espace affines suivants :

(i) le sous-espace affine engendré par un nombre fini de points (on pourra aussi voir la section "barycentre") ;

(ii) le sous-espace affine $a + W$, lorsqu'on connaît : (a) un système de générateurs $(w_1, \ldots, w_k)$ de W, (b) un système d'équations définissant W ;

(iii) le sous-espace affine intersection de deux sous-espaces affines F et F' lorsqu'on connaît : (a) une description paramétrée de F et F', (b) une description cartésienne de F et F' ;

(iv) le sous-espace affine engendré par deux sous-espaces affines F et F' lorsqu'on connaît : (a) une description paramétrée de F et F', (b) une description cartésienne de F et F'.

Applications affines, groupe affine.

Soient E et E' deux espaces affines (associés aux espaces vectoriels V et V' respectivement) et soit $x \in E$. Une application $f : E \longrightarrow E'$ est dite *affine* si l'application $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ définie par $v \mapsto \overrightarrow{f(x)f(y)}$, où $y = x + v$, est une application linéaire. Il est facile de voir que la propriété ne dépend pas du choix de x et de plus l'application linéaire est la même pour tout choix de x. En effet, si on prend x' a la place de x, l'application devient $v \mapsto \overrightarrow{f(x')f(x'+v)} = \overrightarrow{f(x')f(x)} + \overrightarrow{f(x)f(x'+v)} = -\overrightarrow{f(x)f(x')} + \overrightarrow{f(x)f(x+(\overrightarrow{xx'}+v))} = \overrightarrow{f(x)f(x+v)}$, où la dernière égalité vient du fait que l'application $v \mapsto \overrightarrow{f(x)f(x+v)}$ est linéaire. En d'autres termes une application affine est déterminée par son image en un point et par l'application linéaire associée. Les propriétés suivantes sont évidentes :

En composant deux applications affines on obtient une application affine, car cela est le cas pour les applications linéaires

L'identité est une application affine dont la partie linéaire est l'identité.

L'inverse d'une application affine bijective est affine, car cela est le cas pour les applications linéaires, et sa partie linéaire est l'inverse de la partie linéaire de l'application de départ.

Il en découle que les bijections affines de E dans lui-même forment un groupe appelé *le groupe affine de E.*

Une application affine est injective/surjective si et seulement si l'application linéaire associée l'est. Injectivité : $f(x) = f(y)$ si et seulement si $\vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) = \vec{f}(\overrightarrow{x_0y})$ si et seulement si $\overrightarrow{xy} \in \ker \vec{f}$. Surjectivité : pour tout $z \in E'$ il existe un unique $v' \in V'$ tel que $z = f(x_0) + v'$ et réciproquement, d'où $z \in f(E)$ si et seulement si $v' \in \vec{f}(V)$.

Les applications constantes sont affines de partie linéaire nulle.

L'image directe/réciproque (si non vide) par une application affine d'un sous-espace affine est encore un sous espace affine, car la même propriété est valable pour les sous-espaces vectoriels et les applications linéaires.

Les points fixes d'une application affine, lorsqu'il y en a, forment un sous-espace affine de direction l'espace propre de $\vec{f}$ associé à la valeur propre 1.

Une application affine préserve le parallélisme par images directes et inverses, car une application linéaire préserve les inclusions par images directes et inverses.

On voit aussi que deux espaces affines de la même dimension et sur le même corps sont isomorphes (car deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de la même dimension le sont).

On appelle *propriété affine* toute propriété qui est préservé par toute bijection affine (ou application affine injective). Exemples de propriétés affines sont : être aligné, être parallèle, être un triangle non aplati, etc. On remarquera que les deux premières propriétés sont préservées par de applications affines arbitraires.

Exercice 5. Soit E un espace affine de direction V.

1. Montrer que $(V, +)$ est un sous-groupe distingué du groupe affine $GA(E)$ de E, le sous-groupe des *translations*. L'application linéaire associée à une translation est l'identité (de V). Remarque : si l'on considère que les bijections affines sont celles qui “préservent” la structure affine, ceci est une évidence. En effet, $(V,+)$ ici n'est rien d'autre que l'image de la représentation donnée dans l'une des définitions d'espace affine. Dire que la structure est préservée, revient simplement à dire que l'image de la représentation est invariante par conjugaison !

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

3. Montrer que tout élément de $GA(E)$ s'écrit comme produit d'une translation et d'un élément de $GL_n(\mathbb{K})$. (Pour ceux qui connaissent la notion de produit semidirect, cela dit que $GA(E) = V \rtimes GL_n(\mathbb{K})$).

4. Montrer qu'une application affine de E dans E admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire associée.

5. Soit $x_0 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle homothétie de centre x_0 et rapport λ l'application affine définie par $x \mapsto x_0 + \lambda\overrightarrow{x_0x}$. Montrer que les homothéties de centre x_0 forment un sous-groupe de $GA(E)$ et déterminer ses classes de conjugaison. Montrer qu'une application $f \in GA(E)$ est une homothétie si et seulement si pour toute droite D de E on a que $f(D)$ est parallèle à D.

6. Montrer que toute application affine de $\mathbb{K}^{n-1}$ dans lui même est la restriction d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$. Déduire que $GA(\mathbb{K}^{n-1})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

Un exemple fondamental d'application affine $E \longrightarrow E$ qui n'est pas une bijection est donné par une *projection* : soit F un sous-espace affine de E de direction W et soit U un supplémentaire de W dans V. Soit $x_0 \in F$. On appelle *projection de E sur F parallèlement à U* l'application affine P qui fixe x_0 et dont l'application linéaire associé est la projection de V sur W parallèlement à U. On voit facilement que cela ne dépend pas du choix de $x_0 \in F$. On remarque aussi que les points de F sont précisément les points fixes de la projection.

Soit $\lambda \notin \{0,1\}$. L'application définie par $E \ni x \mapsto P(x) + \lambda\overrightarrow{P(x)x}$ (où P est la projection qu'on vient de définir) est appelée *affinité de base F et de rapport λ parallèlement à U*. Lorsque $\lambda = -1$ elle est appelée *symétrie autour de F parallèlement à U*. Si, de plus, F est un point, on parle de *symétrie centrale*. (On aura remarqué que ceci n'a pas de sens en caractéristique 2).

Exercice 6. Montrer qu'une affinité est un élément de $GA(E)$. Déterminer sa partie linéaire et son ensemble de points fixes. Montrer qu'un élément de $GA(E)$ est une involution (i.e. a ordre 2) si et seulement si elle est une symétrie. On remarquera que, lorsque F est un point, une affinité est une homothétie de centre F et rapport λ.

Exercice 7. Le but de l'exercice est de présenter différentes propriétés et caractérisations des applications affines. On a d'abord besoin d'introduire les notions de mesure algébrique et de rapport de deux mesures algébriques. Soient x et y deux points d'un espace affine et v un vecteur non nul appartenant à la direction de la droite contenant x et y. Il existe un unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{xy} = \lambda v$. On appelle

λ la *mesure algébrique de* $\overrightarrow{xy}$, et on la note $\overline{xy}$. $\overline{xy}$ dépend du choix de v, mais, si $x' \neq y'$ appartiennent à la droite par x et y ou à une droite parallèle, le rapport entre les mesures algébriques $\overline{xy}$ et $\overline{x'y'}$, lorsqu'il est bien défini, ne dépend pas du choix de $v \neq 0$.

1. Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application entre deux espaces affines de direction les espaces vectoriels V et V' définis sur le même corps de base $\mathbb{K}$. Montrer que si f est affine elle préserve les parallélogrammes. Soit $x_0 \in E$. Pour tout $v \in V$ on définit $\psi(v) \in V'$ par $\psi(v) = \overrightarrow{f(x_0)f(x_0+v)}$. Montrer que $\psi : V \longrightarrow V'$ est bien définie et que si f préserve les parallélogrammes elle est additive (à savoir $\psi(v+w) = \psi(v) + \psi(w)$). (Dans ce cas on dit que f est *semi-affine*). Déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ alors ψ est linéaire et f affine. Soient maintenant $E = E' = \mathbb{C}$ et $f(z) = \bar{z}$ la conjugaison complexe. Déterminer si f préserve les parallélogrammes et si elle est affine dans les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2. Montrer qu'une application entre deux espaces affines sur le même corps de base de caractéristique différente de 2 est affine si et seulement si elle conserve l'alignement des points et les rapports des mesures algébriques -lorsque les images des points ne sont pas confondues.

3. Soit E un espace affine sur un corps ayant au moins trois éléments. Montrer que si $f : E \longrightarrow E$ est une bijection qui conserve l'alignement des points alors f préserve le parallélisme entre droites. Déduire qu'elle préserve les parallélogrammes.

4. Soit E un espace affine sur $\mathbb{R}$. Supposons $\dim(E) \geq 2$. Montrer que si $f : E \longrightarrow E$ est une bijection qui conserve l'alignement des points alors f est affine. Montrer que cela n'est plus vrai en général si $\mathbb{K}$ est un corps fini. On observera aussi que, si la dimension de E vaut 1, toute bijection de E préserve trivialement l'alignement des points mais pas toute bijection est affine.

5. Soit E un plan affine et soit $f : E \longrightarrow E$ une application non constante telle que pour tous $x, y \in E$ $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ sont colinéaires. Montrer que si f a un point fixe elle est une homothétie et si elle n'en a pas f est une translation.

Exercice 8. (*Théorème de Thalès*) On considère un plan affine E et deux de ses droites D, D'. Soient $L_1 \neq L_2$ et L_3 trois droites de E parallèles entre elles mais non parallèles ni à D ni à D'. On appelle a_i (respectivement b_i) le point d'intersection de L_i avec D (respectivement D'). Montrer qu'on a $\overline{a_1a_3}/\overline{a_1a_2} = \overline{b_1b_3}/\overline{b_1b_2}$.

Exercice 9. (*Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva*) On considère un plan affine et trois points a, b, c non alignés. On considère ensuite x, y, z des points sur les droites par a et b, par b et c, et par a et c respectivement, tels que $\{a,b,c\} \cap \{x,y,z\} = \varnothing$.

1. Les points x, y et z sont alignés si et seulement si

$$(\overline{xa}/\overline{xb}) \times (\overline{yb}/\overline{yc}) \times (\overline{zc}/\overline{za}) = 1$$

2. Les droites passant par a et y, b et z, c et x sont *concourantes* (i.e. passent par un même point) ou *parallèles* (i.e. passent par un même point à l'infini) si et seulement si

$$(\overline{xa}/\overline{xb}) \times (\overline{yb}/\overline{yc}) \times (\overline{zc}/\overline{za}) = -1$$

(Ce résultat admet donc une formulation plus simple en géométrie projective...)

Barycentres.

On considère un espace affine E de dimension n de direction le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. On considère $x_1, \ldots, x_k$ une famille finie de points de E. Soit $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ un poids. On considère l'application $E \longrightarrow V$ définie par $y \mapsto \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{yx_i}$. En écrivant $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{yx_i} = (\sum_{i=1}^k \alpha_i)\overrightarrow{yy_0} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{y_0x_i}$ il est facile de voir que cette application est soit constante (si $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$) soit bijective. De plus on voit qu'il s'agit d'une application affine si on considère sur V la structure affine naturelle. Lorsque l'application est une bijection, on appelle *barycentre des x_i affectés par les poids α_i* l'unique point y_0 dont l'image vaut 0. On rappelle que si l'on considère une partition de la famille (α_i, x_i), le barycentre de la famille est le barycentre des barycentres des sous-familles de la partition (pourvu que la somme des poids de chaque sous-famille est différent de zéro). Pour voir cela, soit I l'ensemble des indices et $\{I_j \mid j \in J\}$ une partition de I. On suppose donc que les sommes $\sum_{i\in I} \alpha_i$ et $\sum_{i\in I_j} \alpha_i$ sont toutes non nulles. On note par p_j le barycentre de la famille (α_i, x_i) pour $i \in I_j$. On a alors $\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{yx_i} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} \alpha_i \overrightarrow{yx_i} = \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I_j} \alpha_i \overrightarrow{yp_j} + \sum_{i\in I_j} \alpha_i \overrightarrow{p_jx_i})$. Du fait que les p_j sont des barycentres on a que cette quantité est encore égale à $\sum_{j\in J}(\sum_{i\in I_j} \alpha_i)\overrightarrow{yp_j}$. Il en suit que y est barycentre des (α_i, x_i) si et seulement s'il est barycentre des $(\sum_{i\in I_j} \alpha_i, p_j)$.

Exercice 1.

1. Montrer que, dans un espace affine sur un corps de caractéristique différente de 2, l'*isobarycentre* (i.e. le barycentre avec poids tous égaux) de deux points est le milieu du segment. Plus généralement montrer que le barycentre de (α, a) et (β, b) appartient à la droite par a et b.

2. Montrer que, dans un plan affine sur $\mathbb{R}$, le barycentre de trois points affectés par $\alpha_i = 1/3$ pour $i = 1, 2, 3$, à savoir l'isobarycentre, est le barycentre (point commun aux trois médianes) du triangle dont les sommets sont les trois points.

Exercice 2.

1. Montrer qu'une application entre deux espaces affines est affine si et seulement si elle préserve les barycentres.

2. Montrer qu'un sous-ensemble non vide d'un espace affine est un sous-espace affine si est seulement s'il contient les barycentres de ses points.

Espaces affines euclidiens

On suppose que l'espace affine E est défini sur $\mathbb{R}$ et que V est muni d'un produit scalaire euclidien : la distance entre deux points x, y de E est la norme de $\overrightarrow{xy}$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de V. On appelle *isométrie (affine)* de l'espace euclidien E tout automorphisme affine de E qui préserve les distances entre points. On note qu'une application qui préserve la distance doit aussi préserver le produit scalaire (la réciproque étant évidente) car on a $\langle v, w \rangle = (\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)/2 = (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)/4$. On peut montrer que le groupe des isométries affines est engendré par les réflexions affines. Une *similitude* ou *homothétie-translation* de E *de rapport* $k > 0$ est un automorphisme affine qui dilate toutes les distances du même facteur k. Un repère affine d'un espace euclidien est dit *cartésien* si la base vectorielle associée est orthonormée. On verra dans la suite que toute application de E dans lui-même qui est une isométrie est nécessairement affine.

Exercice 1. (Distance entre un point et un sous-espace). Étant donnée une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_k)$ on définit la *matrice de Gram* $\in \mathcal{M}_{(k\times k)}(\mathbb{R})$ comme la matrice symétrique dont le coefficient ij est égal au produit scalaire de v_i et v_j. On note par $G(v_1, \ldots, v_k)$ son déterminant. Soient E un espace affine euclidien, $x \in E$ et F un sous-espace dirigé par $U = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. On a alors :

$$d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_k, x)}{G(e_1, \ldots, e_k)}$$

où l'on pense a E avec sa structure vectorielle naturelle avec $0 \in F$.

Angles

On peut introduire les fonctions trigonométriques en utilisant l'exponentielle complexe $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Cette série entière a rayon de convergence infini (d'après le théorème de d'Alembert) et sa limite est donc une fonction holomorphe définie sur tout le plan complexe, qui coïncide avec sa dérivée. L'exponentielle complexe satisfait :

$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$: ceci découle du théorème de Fubini (pour la mesure de dénombrement) et dit que exp est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; en particulier l'exponentielle ne s'annule jamais.

$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$: ceci est conséquence du fait que la conjugaison complexe est continue. Il en suit que pour tout réel t $\exp(it)$ est un nombre complexe de module 1. Par ailleurs, si $\exp(z) \in U(1)$ alors z est imaginaire pur. En effet on aura $1 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(2\Re(z))$, ce qui reconduit le problème à l'étude de l'exponentielle réelle, dont l'image vaut 1 seulement en 0.

Le morphisme continu de groupes $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it) \in U(1)$ est surjectif et son noyau est non trivial : soit $z \in U(1) \setminus \{-1\}$. On pose pour $s \in [0, 1]$ $g(s) =$

$1-s+sz$ qui ne s'annule pas. On considère $h(s)=g(s)\exp(-\int_0^s \frac{g'(u)}{g(u)}\mathrm{d}\,u)$ et on vérifie $h(0)=1$ $h'(s)=0$, d'où $h(s)=1$ pour tout $s\in[0,1]$, et donc $z=g(1)=\exp(w)$ avec $w=\int_0^1 \frac{g'(u)}{g(u)}\mathrm{d}\,u$. Ceci dit que l'image contient $U(1)\backslash\{-1\}$. En particulier il existe θ tel que $\exp(i\theta)=i$ et on a $\exp(i2\theta)=-1$ (le morphisme est surjectif) $\exp(i4\theta)=1$ (mais pas injectif). Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ qui ne peut être ni $\{0\}$ (le morphisme n'est pas injectif), ni $\mathbb{R}$ (car l'image n'est pas constante égale à 1). Par conséquent, il existe un nombre réel positif, qu'on appelle π tel que le noyau est de la forme $2\pi\mathbb{Z}$. Le premier théorème d'isomorphisme donne alors $U(1)\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Les fonctions sin et cos sont alors définies comme la partie imaginaire et la partie réelle de la fonction $\mathbb{R}\ni t\mapsto\exp(it)\in U(1)$. D'après les propriétés vues on a que pour tout $z\in U(1)$ il existe un unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $z=\exp(i\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$, et on peut déduire toutes les propriétés usuelles des fonctions trigonométriques.

On considère un couple -ordonné- (v_1,v_2) de vecteurs non nuls d'un plan (vectoriel) euclidien orienté. On vérifie facilement qu'il existe une unique isométrie directe ψ du plan telle que $\psi(\frac{v_1}{\|v_1\|})=\frac{v_2}{\|v_2\|}$ (ceci vient du fait qu'étant donné un vecteur unitaire e_1 il existe un unique autre vecteur unitaire e_2 tel que (e_1,e_2) soit une base orthonormée directe du plan). On appelle $\psi\in SO(2)$ l'*angle orienté entre v_1 et v_2*. Si on considère la matrice associé à ψ dans une base orthonormée directe on voit bien qu'elle ne dépend pas de la base choisie. En effet on a

$$SO(2)=\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mid a^2+c^2=b^2+d^2=1=ad-cb,\ ab+cd=0\}$$

d'où on a $a=d$, $c=-b$ et il existe un unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $a=d=\cos\theta$ et $c=-b=\sin\theta$. On note $R(\theta)$ cette matrice. On voit que $R(\theta)R(\theta')=R(\theta+\theta')$, $R(\theta)^{-1}=R(-\theta)$ et on déduit que l'application $\mathbb{R}\ni\theta\mapsto R(\theta)\in SO(2)$ est un morphisme de groupes et que $SO(2)\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $SO(2)$ est donc un groupe abélien : tout élément de $SO(2)$ est l'unique élément dans sa classe de conjugaison. (Alors que la classe de conjugaison de $R(\theta)$ dans $O(2)$ contient aussi $R(-\theta)$).

Dans ce contexte, si ψ est l'angle orienté entre (v_1,v_2) et si $R(\theta)$ est la matrice associée à ψ alors $\theta\in[0,2\pi[$ est la *mesure* de l'angle orienté et on dit que ψ est la *rotation d'angle θ*. Bien entendu, ceci permet de définir un angle orienté entre demi-droites issues d'un même point dans un plan affine euclidien orienté.

On peut définir une notion d'*angle non orienté* comme la classe d'équivalence de couples de demi-droites de même origine à isométrie près. Si x, y et z sont trois points de E, la mesure de l'angle déterminé par les demi-droites d'origine x et passant par y et z respectivement est l'unique nombre réel $\theta\in[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta)=\frac{\langle\overrightarrow{xy},\overrightarrow{xz}\rangle}{\|\overrightarrow{xy}\|\times\|\overrightarrow{xz}\|}$. Deux vecteurs dans un espace de dimension $n>2$ sont toujours contenus dans un plan, mais on ne peut pas définir un angle orienté entre eux (pourquoi ?). Observons que si x, y et z sont trois points d'un plan et θ est l'angle orienté entre les demi-droites d'origine x et passant par y et z dans l'ordre, alors les deux notions de cos coïncident. En effet on aura $\frac{\overrightarrow{xz}}{\|\overrightarrow{xz}\|} = R(\theta)\frac{\overrightarrow{xy}}{\|\overrightarrow{xy}\|}$. Il suffit ensuite de prendre le produit scalaire de $\frac{\overrightarrow{xz}}{\|\overrightarrow{xz}\|}$ avec $\frac{\overrightarrow{xy}}{\|\overrightarrow{xy}\|}$.

Avant de continuer, notons que, si la définition des fonctions trigonométriques en utilisant l'exponentielle complexe est la plus "simple" possible et donc elle reste privilégiée, on peut rendre rigoureuse la définition "géométrique" plus intuitive qu'on donne à l'école en utilisant, en gros, la notion de courbe rectifiable, de longueur d'une courbe et de géodésique (au sens de courbe entre deux points dont la longueur coïncide avec la distance entre les points et telle que toute autre courbe entre ces deux point est plus longue -voir la dernière partie de ces notes). Mettre à plat cette autre approche est un très bon exercice !

Isométries affines. Formes réduites, générateurs.

Une *isométrie affine* est une application affine entre espaces affines euclidiens qui préserve la distance. En particulier, une isométrie affine est toujours injective. On va considérer des isométries affines d'un espace euclidien dans soi-même. On voit facilement qu'un élément du groupe affine d'un espace euclidien est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire est une isométrie vectorielle, c'est-à-dire un élément de $O(n)$, où n est la dimension de l'espace. On rappelle que $O(n)$ contient un sous-groupe d'indice 2 (donc nécessairement distingué), noté $SO(n)$, correspondant aux matrices de déterminant égal à 1. On rappelle qu'un espace vectoriel réel admet deux orientations correspondant aux deux orbites du groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ des matrices inversibles à déterminant positif, agissant sur les bases de l'espace vectoriel. Si on ne considère que des bases orthonormées, les orbites sont à prendre par rapport à l'action de $SO(n)$ (i.e. $SO(n)$ est le sous-groupe de $GL_n^+(\mathbb{R})$ qui préserve les bases orthonormées). On appelle une isométrie affine *déplacement* si sa partie linéaire préserve l'orientation (i.e. est dans $SO(n)$) et *antidéplacement* sinon.

On va montrer que toute isométrie affine f admet une *forme réduite*, à savoir une écriture de la forme $f(x) = g(x) + v_0$ avec g isométrie affine ayant un point fixe x_0 et v_0 vecteur de translation, tels que $g(x) + v_0 = g(x + v_0)$ (i.e. g et la translation commutent).

Remarquons que si g et v_0 existent, et si ψ est la partie linéaire de f (et de g) on doit avoir $\psi(v_0) = v_0$, donc $v_0 \in \ker(Id - \psi)$, et ceci est équivalent à la commutativité $(g(x + v_0) = g(x) + \psi(v_0) = g(x) + v_0)$.

On considère l'ensemble

$$A = \{\overrightarrow{xf(x)} \in \ker(Id - \psi) \mid x \in E\}.$$

On voit facilement que, pour tout point fixe x de g, $\overrightarrow{xf(x)}$ appartient à A. Maintenant on observe que

$$(Id - \psi)(V) = (\ker(Id - \psi^*))^\perp = (\ker(Id - \psi^{-1}))^\perp = (\ker(Id - \psi))^\perp$$

où l'on a utilisé que ψ est orthogonal et que $\psi(v) = v$ si et seulement si $\psi^{-1}(v) = v$. Cela implique que si A n'est pas vide il contient un seul élément. En effet, soient $x, y \in E$ tels que $\overrightarrow{xf(x)}$ et $\overrightarrow{yf(y)}$ sont dans A. On a alors

$$\ker(Id - \psi) \ni \overrightarrow{xf(x)} - \overrightarrow{yf(y)} = \overrightarrow{xy} - \overrightarrow{f(x)f(y)} \in (Id - \psi)(V).$$

Il en suit que si A n'est pas vide, la décomposition cherchée (existe et) est unique (on aura $A = \{v_0\}$ et $g(x) = f(x) - v_0$ pour tout $x \in E$; de plus, si $y \in E$ est tel que $\overrightarrow{yf(y)} \in A$, alors on vérifie que $g(y) = y$). Il reste donc a montrer qu'A n'est pas vide.

On considère l'application $E \longrightarrow V$ définie par $x \mapsto \overrightarrow{xf(x)}$ (ici V est pensé avec sa structure affine naturelle) : il s'agit d'une application affine de partie linéaire $(\psi - Id)$. Son image est donc un sous-espace affine de V de direction $(Id - \psi)(V)$. Puisque $\ker(Id - \psi)$ est son supplémentaire orthogonal, les deux sous-espaces ont intersection non vide (cette intersection est précisément A).

Exercice 2. Montrer que tout élément de $O(n)$ est le produit d'au plus n réflexions vectorielles. De même, montrer que toute isométrie affine est le produit d'au plus $n + 1$ réflexions affines. Déduire qu'une application qui préserve la distance d'un espace affine euclidien est nécessairement affine. (On pourra commencer par montrer qu'une application qui préserve la distance d'un espace affine euclidien et qui laisse fixe un repère affine orthonormé est l'identité.)

On rappelle quelques définitions. En dimension 2 un déplacement est toujours soit une *rotation affine* soit une translation, alors qu'un antidéplacement est une *symétrie glissée* : son écriture réduite consiste en une réflexion affine et une translation (peut être triviale) parallèle à l'axe de la symétrie. En dimension 3 les déplacements sont les *vissages* : leur décomposition réduite consiste en une rotation et une translation parallèle à l'axe de la rotation (les rotations et translations peuvent être vues comme des cas particuliers) alors que les antidéplacements sont les symétries glissées et les *antirotations affines* (ou *isométries négatives à point fixe unique*) : elles sont obtenues en composant une rotation affine et une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation.

Exercice 3. Donner la classification des isométries affines en dimension 2 et 3 (en fonction de la dimension du lieu de leur points fixes, et des propriétés de l'isométrie linéaire associée). On pourra rappeler la classification des éléments de $O(2)$ et $O(3)$.

Exercice 4. Déterminer le résultat de la composition de deux rotations affines de l'espace de dimension 3 (en fonction de la position relative de leurs axes).

Dans les exercices qui suivent on parle de polygones et de polyèdres. Ces objets n'ont pas été introduits de façon rigoureuse. Ici on pensera à ces objets comme à des sous-ensembles finis du plan et de l'espace, correspondant à leurs sommets. Il est peut-être important de souligner que ce point de vue peut ne pas coïncider avec celui des polygones et des polyèdres pensés comme sous-ensembles convexes, voir comme enveloppes convexes des leur sommets, car certains points pourraient être dans l'intérieur du convexe. Par ailleurs, si on imagine un polygone comme un ensemble de sommets et de côtés, il faut dire qui est relié à quoi, et on peut tomber sur des polygones non convexes, voir avec des côtés que s'intersectent en dehors des sommets. On remarque, néanmoins, que réduire polygones et polyèdres à l'ensemble de leurs sommets ne crée pas d'ambiguïté dans le cas des triangles et des tétraèdres, si on accepte les cas "aplatis".

Exercice 5. Soit $\mathcal{P}$ un polygone régulier à n sommets $P_1 \dots P_n$. Soit r la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de son centre et s la réflexion de $\mathcal{P}$ dont l'axe passe par P_n.

1a. Considérer $\mathcal{P}$ comme le polygone dans le plan des complexes dont les sommets sont $P_k = \exp(2ik\pi/n)$, $k = 1, \dots, n$, les racines $n$èmes de l'unité. Les transformations r et s sont alors des isométries (vectorielles) de $\mathbb{C}$. Trouver les images $r(z)$ et $s(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1b. Montrer que l'ensemble $\mathbf{D}_n = \{Id_{\mathbb{C}}, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ est un groupe par rapport à la composition et décrire sa table de multiplication (il s'agit du *groupe diédral d'ordre* $2n$). Montrer qu'il coïncide avec le groupe des *symétries (ou isométries) de* $\mathcal{P}$, c'est-à-dire des isométries qui laissent P invariant.

1c. Déduire de 1b que $\{Id_{\mathbb{C}}, r, \dots, r^{n-1}\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{D}_n$.

1d. Déduire de 1b une partie génératrice pour $\mathbf{D}_n$.

2. † Montrer que $\mathbf{D}_n \cong \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$.

3a. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbf{D}_n$ et leurs classes de conjugaison. (On pourra interpréter certains de ces sous-groupes comme des groupes de symétrie de polygones inscrits dans $\mathcal{P}$). Donner une explication géométrique pour le différent comportement de classes de conjugaison des sous-groupes cycliques d'ordre 2 lorsque n est pair ou impair.

3b. Déterminer $\mathcal{Z}(\mathbf{D}_n)$ et $\mathbf{D}'_n$.

Exercice 6. Montrer qu'il y a au plus cinq polyèdres réguliers convexes (on pourra utiliser le fait -que l'on démontrera- que la somme des angles autour d'un sommet du polyèdre est $< \pi$). Donner une réalisation géométrique (au moins dans les trois cas les plus simples). Montrer qu'on peut inscrire un octaèdre dans un tétraèdre, et deux tétraèdres dans un cube. Déterminer les groupes d'isométrie directes (de l'espace affine euclidien) qui les laissent invariants -on pourra choisir leur barycentre comme origine du repère-.

Les exercices qu'on vient de voir donnent une bonne occasion pour remarquer que si X est un sous-ensemble fini d'une espace euclidien E , le groupe des isométries affines qui le laissent invariant est, en réalité, un sous-groupe de $O(n)$. En effet, l'isobarycentre p des points de X est fixé par toute isométrie qui préserve X. On peut donc choisir p comme le zéro d'une structure naturelle d'espace vectoriel (hilbertien) pour E.

Groupes, géométrie, combinatoire

Quelques exercices qui touchent à ces trois sujets.

Le premier exploite des propriétés géométriques/topologiques de $SO_3(\mathbb{R})$ pour en déduire une propriété algébrique.

Exercice 7. Montrer que le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. Utiliser le fait que $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les *retournements* (i.e. rotations d'angle π) et que les retournements sont tous conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$ et que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe.

On a déjà rencontre un groupe qui a aussi une structure de variété. Il s'agit du cercle $\mathbf{S}^1 = U(1)$. Les deux exercices qui suivent traitent d'autres exemples de *groupes de Lie*, à savoir groupes ayant aussi une structure de variété différentiable. On remarquera que $\mathbf{S}^3$ est aussi un groupe, celui des quaternions unitaires (de façon analogue à $\mathbf{S}^1$ qui est celui des complexes unitaires).

Exercice 8. Le but de cet exercice est de montrer que $SO_4(\mathbb{R})$ est isomorphe et homéomorphe à $(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On considérera $\mathbf{S}^3$ comme l'espace des quaternions unitaires. Montrer que pour tout $(q', q) \in \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ l'application $A(q', q) : \mathbf{S}^3 \longrightarrow \mathbf{S}^3$ définie par $x \mapsto q'x\bar{q} = q'xq^{-1}$ est une isométrie de $\mathbf{S}^3$ qui préserve l'orientation, donc $A(q', q) \in SO_4(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A : \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \longrightarrow SO_4(\mathbb{R})$ définie par $(q', q) \mapsto A(q', q)$ est un homomorphisme de groupes, qui est surjectif. Trouver son noyau pour conclure.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est isomorphe et homéomorphe à $\mathbb{RP}^3 = \mathbf{S}^3/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On considérera $\mathbf{S}^3$ comme l'espace des quaternions unitaires. Montrer que pour tout $q \in \mathbf{S}^3$ l'application $Q : \mathbf{S}^3 \longrightarrow \mathbf{S}^3$ définie par $x \mapsto qx\bar{q} = qxq^{-1}$ est une isométrie de $\mathbf{S}^3$ qui préserve l'orientation. Montrer que l'application $\mathbf{S}^3 \longrightarrow SO_3(\mathbb{R}) \subset SO_4(\mathbb{R})$ définie par $q \mapsto Q$ est un homomorphisme continu de groupes, qui est surjectif. Trouver son noyau et conclure.

Cet exercice exploite de la combinatoire et des propriétés des isométries vectorielles de l'espace $\mathbb{R}^3$ pour obtenir des renseignements algébriques sur $SO(3)$.

Exercice 10. (*Classification des sous-groupes finis de* $SO_3(\mathbb{R})$) Soit $G \neq 1$ un sous-groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$. On note $X = \{x \in \mathbf{S}^2 \mid \exists\, g \in G\setminus\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\},\ g(x) = x\} \subset \mathbf{S}^2$, où $\mathbf{S}^2$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (pour la métrique euclidienne usuelle).

1. Montrer que G agit sur X et déterminer $\mathrm{Card}(X^g)$, le cardinal de l'ensemble des points fixes de g dans X, pour chaque $g \in G$.

2. On note N le nombre d'orbites de l'action de G sur X, et $x_1, \ldots, x_N$ un point dans chaque orbite. En utilisant la formule de Burnside montrer que

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{N} (1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}).$$

3. En déduire que N ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3.

4. Déterminer G lorsque $N = 2$.

5. Montrer que lorsque $N = 3$, on est dans un de quatre cas suivants :
$|G_{x_1}| = 2$, $|G_{x_2}| = 2$, $|G_{x_3}| = n$, $|G| = 2n$;
$|G_{x_1}| = 2$, $|G_{x_2}| = 3$, $|G_{x_3}| = 3$, $|G| = 12$;
$|G_{x_1}| = 2$, $|G_{x_2}| = 3$, $|G_{x_3}| = 4$, $|G| = 24$;
$|G_{x_1}| = 2$, $|G_{x_2}| = 3$, $|G_{x_3}| = 5$, $|G| = 60$.

6. Reconnaître dans chaque cas la configuration des points de X et déterminer G.

7. Quels sont les sous-groupes finis de $SO(2)$? Quelle est leur interprétation géométrique ? Lesquels de ces groupes sont conjugués à de sous-groupes de $SL(2, \mathbb{Z})$?

Exercice 11.

1. Déterminer toutes les possibles positions relatives de deux droites affines dans l'espace (réel de dimension 3). NB : ceci n'utilise que la structure affine.

2. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 montrer qu'il existe une unique droite perpendiculaire à deux droites non coplanaires.

3. (*Bissectrices*) On considère deux droites dans un plan affine euclidien ayant exactement un point en commun. Montrer qu'il existe précisément deux réflexions affines qui échangent les deux droites. Montrer de plus que leurs axes sont orthogonaux.

Beaucoup de propriétés des figures planaires (cercles, triangles, polygones, configurations de droites et de points) sont soit affines, soit métriques, et peuvent être démontrées dans le cadre de la géométrie affine (euclidienne). Ici on ne donnera que quelques exemples. Il faut remarquer que la notion d'angle n'est pas vraiment une notion métrique : pour préserver les angles on n'a pas besoin d'une isométrie : une similitude suffit. La notion d'angle est une notion *conforme*. (Voir plus loin pour des exemples de transformations qui préservent les angles sans préserver les distances ni être affines).

Exercice 12. On considère un plan affine euclidien E. Soient a, b, c les sommets d'un triangle non aplati de E et soit x le centre du cercle circonscrit au triangle.

1. Montrer que les hauteurs du triangle sont concurrentes en un point d appelé *orthocentre*.

2. Montrer que l'on a $\overrightarrow{xd} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{xb} + \overrightarrow{xc}$.

3. Pour $y \in \{a, b, c\}$ on considère p le pied de la hauteur du triangle passant par y. Soit y' le symétrique de d par rapport à p, i.e. $y' = d + 2\overrightarrow{dp}$. Montrer que y est sur le cercle circonscrit au triangle.

4. Si α, β, γ dénotent les mesures des angles non orientés en a, b et c respectivement, montrer qu'on a

$$\frac{\|\overrightarrow{bc}\|}{\sin \alpha} = \frac{\|\overrightarrow{ca}\|}{\sin \beta} = \frac{\|\overrightarrow{ab}\|}{\sin \gamma} = 2\|\overrightarrow{xa}\|$$

(loi des sinus) et

$$\cos \alpha = \frac{\|\overrightarrow{ca}\|^2 + \|\overrightarrow{ab}\|^2 - \|\overrightarrow{bc}\|^2}{2\|\overrightarrow{ca}\|\|\overrightarrow{ab}\|}$$

(théorème d'Al-Kashi ou loi du cosinus).

5. Déduire la formule d'Héron du point précédent, à savoir, l'aire d'un triangle est égale à $\sqrt{p(p - l_1)(p - l_2)(p - l_3)}$ où l_1, l_2 et l_3 sont les longueurs des côtés du triangle et p son demi-périmètre.

Exercice 13. (Cercle des neuf points) On considère un triangle non aplati de sommets a, b, c dans un plan affine euclidien. On veut montrer que les milieux des trois côtés du triangle, les pieds des trois hauteurs, ainsi que les milieux des trois segments reliant l'orthocentre du triangle à ses sommets sont cocycliques.

1. Montrer que l'homothétie de centre le barycentre et de rapport $-1/2$ envoie les sommets d'un triangle et son orthocentre sur les milieux des côtés opposés et le centre du cercle circonscrit respectivement. Déduire que le barycentre, l'orthocentre et le centre du triangle circonscrit sont alignées. Montrer que l'homothétie de centre l'orthocentre et rapport $1/2$ et l'homothétie précédente envoient le cercle circonscrit sur le même cercle.

2. Déduire le résultat de ce qui précède.

Exercice 14. Montrer qu'un triangle non aplati admet deux ellipses, une inscrite et une circonscrite, de centre le barycentre du triangle. L'ellipse inscrite (dite *de Steiner*) est tangente au triangle en quels points ?

Exercice 15. On considère un triangle non aplati de sommets a, b, c.

1. (*Droite de Simson*) Soit x un point du plan et a', b' et c' les projetés orthogonaux de x sur les droites contenant les trois côtés du triangle. Alors x est sur le cercle circonscrit au triangle si et seulement si a', b' et c' sont alignés.

2. (*Droite de Steiner*) Le point x est sur le cercle circonscrit au triangle si et seulement si ses symétriques par rapport aux côtés sont alignés.

Produit vectoriel et aires

On définit le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ comme 0 si u et v sont linéairement dépendants et comme l'unique vecteur orthogonal à u

et v, de norme $\|u\|\|v\||\sin\angle(u,v)|$ tel que $(u,v,u\wedge v)$ est une base directe sinon. L'application $(u,v)\mapsto u\wedge v$ est bilinéaire antisymétrique. L'antisymétrie est due au fait que la valeur de la norme est symétrique alors qu'en échangeant u et v la base $(v,u,u\wedge v)$ n'est plus directe et donc $v\wedge u=-(u\wedge v)$. Il suffit alors de montrer que l'application est linéaire dans une composante, disons v. Le vecteur $u\wedge v$ est un multiple du vecteur w obtenu en projetant v sur le plan orthogonal à u, puis en appliquant au résultat une rotation d'angle $\pi/2$ et axe dirigé par u. On remarque que la famille (u,v,w) est une base directe, si on oriente le plan orthogonal à u de façon cohérente avec l'orientation de u. La rotation dans le plan est alors choisie de façon compatible avec cette orientation. On a $u\wedge v=\lambda w$ et il suffit de montrer que $\lambda\geq 0$ ne dépend pas de v. Puisque la rotation est une isométrie, il suffit de comparer la norme de $u\wedge v$ et celle de la projection de v sur $\langle u\rangle^{\perp}$. La norme de la projection est $\|v-\langle v,u/\|u\|\rangle u/\|u\|\|$ et en prenant le carré on obtient $\|v\|^2+(\langle v,u/\|u\|\rangle)^2-2\langle v,u/\|u\|\rangle^2=\|v\|^2(1-\cos^2\angle(u,v))=\|v\|\sin^2\angle(u,v)$. On voit donc que si $\sin\angle(u,v)\neq 0$ (lorsque les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires) λ doit être égale à $\|u\|$, ce qui ne dépend pas de v.

Exercice 16. Donner les coordonnées de $u\wedge v$ en fonction de celles de u et v par rapport à une base orthonormée directe. En déduire que $\langle u\wedge v,w\rangle=\det(u,v,w)$ (*produit mixte*) et que cela ne dépend pas de la base choisie (dans l'écriture $\det(u,v,w)$, (u,v,w) dénote la matrice dont les vecteurs colonne sont donnés par les coordonnées de u, v et w dans la base choisie).

Soit P un plan euclidien dans un espace euclidien E de dimension 3. On suppose P et E dirigés par U et V respectivement. Soit (e_1,e_2) une base orthonormée directe de U et (e_1,e_2,e_3) une base orthonormée directe de V. Si $a,b,c\in P$ alors la troisième coordonnée de $\overrightarrow{ab}\wedge\overrightarrow{ac}$ par rapport à la base (e_1,e_2,e_3) est *deux fois l'aire orientée du triangle* a,b,c : pour un triangle non aplati, elle est positive si $(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac})$ est une base directe et négative sinon. Ceci est évident car $\overrightarrow{ab}\wedge\overrightarrow{ac}$ et e_3 sont colinéaires et donc la troisième coordonnée est la norme de $\overrightarrow{ab}\wedge\overrightarrow{ac}$ à signe près.

Exercice 17.

1. Soit a,b,c un triangle non aplati. Les coordonnées barycentriques d'un point x dans le repère affine (a,b,c) sont proportionnelles aux aires orientées des triangles x,b,c, x,c,a et x,a,b.

2. Dans un plan affine euclidien on considère un repère affine (a,b,c). Déterminer les coordonnées barycentriques du barycentre, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit du triangle de sommets a, b, c, par rapport au repère.

Exercice 18. Montrer qu'il existe des tétraèdres non réguliers avec faces toutes de même aire. Montrer de plus que les faces d'un tel tétraèdre doivent être isométriques (si le tétraèdre n'est pas aplati).

Le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ lui donne une structure d'algèbre de Lie isomorphe à celle des matrices antisymétriques réelles 3×3 avec le produit de Lie standard ($[A, B] = AB - BA$). Si on identifie $\mathbb{R}^3$ avec l'espace vectoriel des quaternions purs, on peut aussi interpréter le produit vectoriel comme la partie non réelle du produit des quaternions.

Déterminant et volume

Exercice 19. Montrer qu'en dimensions 2 et 3 le déterminant d'une matrice est l'aire orientée (respectivement le volume orienté) du parallélogramme (respectivement parallélépipède) déterminé par ses vecteurs colonne. (On pourra utiliser le procédé de orthogonalisation de Gram-Schmidt, par exemple...)

Distances et problèmes d'extremum

Exercice 20.

1. On considère un plan P de $\mathbb{R}^3$ et deux points A et B dans le même demi-espace délimité par P. Déterminer un point $H \in P$ tel que $AH + HB$ soit minimum.

2. On considère deux points A et B de $\mathbb{R}^3$ et deux plans parallèles P_1 et P_2. Déterminer deux points $H_i \in P_i$, $i = 1, 2$, tels que $AH_1 + H_1H_2 + H_2B$ soit minimum. Que peut on dire si P_1 et P_2 ne sont pas parallèles ?

Exercice 21. Étant donné un triangle dans le plan dont tous les angles sont aigus, déterminer trois points, un sur chaque côté du triangle, qui sont les sommets d'un triangle de périmètre minimal.

Exercice 22. Étant donné un triangle dans le plan, trouver un point m intérieur au triangle tel que le produit de ses distances au côtés du triangle soit maximum.

Exercice 23. On se place dans un espace affine euclidien de dimension finie E dirigé par $\vec{E}$. Soient $P_1, ..., P_l$ des points du plan E et soient $\alpha_1, ..., \alpha_l$ des réels de somme 1. Vérifier que le barycentre de $\{(P_1, \alpha_1), ..., (P_l, \alpha_l)\}$ est le point de E où la fonction réelle f définie sur E par $M \mapsto \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \|\overrightarrow{MP_i}\|^2$ atteint sont minimum.

Convexité

On considère un espace affine E sur $\mathbb{R}$, éventuellement muni d'une structure euclidienne. Un sous-ensemble D de E est *convexe* si pour tout couple de points x, y de D le segment entre x et y est contenu dans D. Il est facile de voir que cette condition est équivalente à : pour toute famille finie de points x_i de D et poids $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_i \lambda_i = 1$ (donc les $\lambda_i \leq 1$) le barycentre est dans D. Ceci découle du fait que tous les poids sont ≥ 0, donc, quitte à oublier les point avec poids nul, tous les poids sont positifs et on peut exploiter l'associativité du barycentre toujours. Exemples de convexes : les demi-espaces, les boules (ouvertes ou fermées), l'intersection de convexes.

Exercice 1. Montrer les propriétés élémentaires suivantes :

1. Les applications affines préservent les convexes par image directe et inverse.

2. Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (éventuellement réduits à des points).

Exercice 2. On considère un espace affine euclidien E de dimension n et D un convexe fermé non vide.

1. Montrer que pour tout $y \in E$ il existe un unique $x \in D$ tel que $d(y, x) = d(y, D)$. On appelle x la *projection* de y sur D. Montrer que x est caractérisé par la propriété que pour tout $z \in D$ on a $\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle \leq 0$. Déduire que l'application $y \mapsto x$ est 1-lipschitzienne (donc faiblement contractante et continue).

2. Soient $y \notin D$ et $x \in D$ sa projection. Montrer que D est contenu dans le demi-espace fermé de E délimité par l'hyperplan orthogonal en x au segment xy et ne contenant pas y. En déduire que tout convexe fermé proprement contenu dans E est intersection de demi-espaces fermés. Montrer aussi que D admet un vecteur normal en tout point de son bord.

3. On appelle *enveloppe convexe* d'un sous-ensemble A de E le plus petit convexe $C(A)$ contenant A. Montrer que $C(A)$ est l'ensemble des barycentres des familles avec au plus $n+1$ points de A avec poids positifs dont la somme vaut 1 (*théorème de Carathéodory*). En déduire que si A est compact alors $C(A)$ est compact. Montrer, en revanche, que si A est fermé $C(A)$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 3. (*Propriétés topologiques des convexes.*)

1. Si $x \in \dot{C}$ et $y \in \bar{C}$ alors $[x, y[\subset \dot{C}$.

2. Si C est convexe alors son intérieur $\dot{C}$ et son adhérence $\overline{C}$ le sont aussi.

3. Si $\dot{C} \neq \varnothing$ alors $\overline{\dot{C}} = \bar{C}$ et $\dot{\bar{C}} = \dot{C}$, de plus la deuxième égalité est vraie même si $\dot{C} = \varnothing$.

Des applications possibles de ces concepts sont données dans les exercices qui suivent.

Exercice 4. (*Théorème de séparation de Hahn-Banach*) Soient C et C' deux convexes non vides, disjoints. Il existe un hyperplan qui sépare C et C' (à savoir C est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés délimités par l'hyperplan). De plus, si C et C' sont tous les deux ouverts ou si l'un est compact et l'autre fermé, alors un peut choisir un hyperplan qui les sépare strictement (à savoir l'hyperplan ne rencontre ni C ni C'). Dans le cas spécial où C' est réduit à un point x dans la frontière de C un tel hyperplan s'appelle *hyperplan d'appui de C en x*.*

Exercice 5. (*Théorème de Krein-Milman*). Tout convexe non vide compact est l'enveloppe convexe de ses *points extrémaux*. Un point p d'un convexe C est

* Pour la définition on n'a pas besoin de C convexe : tout hyperplan qui sépare une partie non vide d'un point de sa frontière est un hyperplan d'appui. Si C est convexe, son existence est assurée par l'existence d'une direction normale en x.

extrémal si chaque fois qu'il est combinaison convexe de deux points $x, y \in C$ alors $p \in \{x, y\}$. Le théorème reste-t-il vrai si on remplace "compact" par "fermé" dans l'énoncé ?

Exercice 6. Tout sous-groupe compacte G de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 2, alors les racines de sa dérivée P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 8. (*Projection sur un fermé*)

1. Soit C une partie non vide d'un espace affine euclidien E. Soit $d_C(\cdot)$ la distance à C. Montrer que $d_C(\cdot) = d_{\bar{C}}(\cdot)$.

2. On suppose que C est convexe. On munit E d'une structure euclidienne. On note désormais $d = d_C$. Soient $M, M' \in E$.

2a. Montrer que $d(M')^2 \leq \|\overrightarrow{p(M)M'}\|^2$ où p désigne la projection sur $\bar{C}$. En déduire que

$$d(M')^2 \leq d(M)^2 + 2\langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)M} \rangle + O(\|\overrightarrow{MM'}\|^2).$$

2b. En écrivant $\overrightarrow{p(M')M'} = \overrightarrow{p(M')p(M)} + \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{MM'}$, montrer que

$$d(M')^2 \geq d(M)^2 + 2\langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{p(M)M} \rangle + O(\|\overrightarrow{MM'}\|^2).$$

(On pourra remarquer que $\langle \overrightarrow{p(M)M}, \overrightarrow{p(M')p(M)} \rangle \geq 0$).

2c. En déduire que d^2 est différentiable sur E et que d est différentiable sur $E \setminus \bar{C}$, de gradient

$$\frac{\overrightarrow{p(M)M}}{\|\overrightarrow{p(M)M}\|}.$$

3. On ne suppose plus C convexe mais on suppose que d est différentiable sur $E \setminus \bar{C}$.

3a. Soit $M \notin \bar{C}$. Soit $N \in \bar{C}$ tel que $\|\overrightarrow{MN}\| = d(M)$. Pour $t \in [0, 1]$, on pose $M_t = N + t\overrightarrow{NM}$. Calculer $d(M_t)$ et en déduire que

$$\frac{d(M_t) - d(M)}{\|\overrightarrow{MM_t}\|} = -1$$

puis que

$$\langle \nabla d(M), \frac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|} \rangle = -1.$$

3b. En utilisant le fait que d est 1-lipschitzienne et le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\nabla d(M) = \frac{\overrightarrow{NM}}{\|\overrightarrow{NM}\|}.$$

3c. En déduire qu'il existe un unique point $N \in \bar{C}$ tel que $\|\overrightarrow{MN}\| = d(M)$.

4. On se propose de montrer ici que si C est une partie non vide fermée de E telle que la fonction distance à C est différentiable sur $E \setminus C$ alors C est convexe. Après choix d'un repère, on identifie E à $\mathbb{R}^n$.

4a. On considère le champ de vecteurs $X : x \in \mathbb{R}^n \setminus C \to \nabla d(x) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\|X(x)\| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ et que X est continu.

4b. D'après le théorème de Cauchy-Peano, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, il existe une trajectoire $\gamma_x : I_x \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall t \in I_x, \dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t)) \ , \ \gamma_x(0) = x, \ (*)$$

où I_x est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Montrer que $\|\gamma_x(t) - \gamma_x(s)\| \leq |t - s|$.

4c. Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d(\gamma_x(t)) = 1.$$

En déduire que $d(\gamma_x(t)) - d(\gamma_x(s)) = t - s$ pour tout $s, t \in I_x$.

4d. En utilisant 4b et 4c, montrer que $\|\gamma_x(t) - \gamma_x(s)\| = |t - s|$ pour tout $s, t \in I_x$, que γ_x décrit un intervalle dans une droite de $\mathbb{R}^n$, puis que γ_x est l'unique solution de $(*)$ (au sens où si γ_x et δ_x sont deux trajectoires partant de x définies sur I_x et J_x respectivement, alors $\gamma_x = \delta_x$ sur $I_x \cap J_x$).

Montrer enfin qu'on peut supposer $I_x =]-d(x), +\infty[$. Que vaut la limite $\lim_{t \to -d(x)} \gamma_x(t)$?

4e. Soit H_x l'hyperplan orthogonal à la droite contenant $\gamma_x([-d(x), +\infty[)$ en $\gamma_x(-d(x))$. Soit E_x le demi-espace fermé de frontière H_x ne contenant pas $\gamma_x(]-d(x), +\infty[)$.

Montrer que $\forall x \notin C$, $C \subset E_x$. (On pourra observer que tous les points de la trajectoire de γ_x ont la même projection $p(x)$ sur C).

Montrer que $C = \cap_{x \notin C} E_x$ et conclure.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que l'épigraphe de f $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t \geq f(x)\}$ est un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pour tout $t_0 < f(x_0)$, il existe une fonction affine $g : x \mapsto \langle a, x \rangle + b$ telle que $g \leq f$ et $g(x_0) = t_0$ (on pourra séparer $\{(x_0, t_0)\}$ de l'épigraphe de f).

3. Montrer que f peut s'écrire comme le supremum d'une famille de fonctions affines.

4. Utiliser ce résultat pour montrer le *théorème de Jensen* : si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité et $u \in L^1(X, \mathbb{R}^n)$, alors pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f\left(\int_X u(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) \leq \int_X f(u(t))\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Exercice 10. (*Théorème du minimax de Ky Fan*) Soit U une partie convexe compacte dans $\mathbb{R}^m$, et soit V une partie convexe dans $\mathbb{R}^n$ (U et V non vides). On se donne une fonction $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u \mapsto f(u,v)$ est convexe et continue et $v \mapsto f(u,v)$ est concave. L'objet de l'exercice est de montrer que

$$\min_u \sup_v f(u,v) = \sup_v \min_u f(u,v).$$

où $+\infty = +\infty$ est admis.

1. Pourquoi peut-on écrire min ? Dans le membre de gauche, on pourra démontrer et utiliser le fait que si $u_n \to u$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} (\sup_v f(u_n,v)) \geq \sup_v f(u,v).$$

On pose $\alpha =$ le sup min, et $\beta =$ le min sup.

2. Prouver que $-\infty < \alpha \leq \beta$. On peut donc supposer $\alpha < +\infty$.

3. On supposera par la suite $\alpha < \beta$ afin d'obtenir une contradiction. Montrer alors que les ensembles $U(v) = \{u \in U \mid f(u,v) \leq \alpha\}$ sont tels que

$$\cap_{v\in V} U(v) = \varnothing.$$

4. En déduire l'existence de $v_1, ..., v_n \in V$ tels que

$$\cap_{i=1,\ldots,n} U(v_i) = \varnothing.$$

5. En déduire que le point $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$ n'est pas dans l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = f(u, v_i) + r_i, r_i \geq 0, u \in U\}.$$

Prouver qu'E est fermé et convexe.

6. En déduire l'existence de $v \in V$ tel que

$$\alpha < \min_{u\in U} f(u,v)$$

ce qui donne une contradiction.

7. Application : Soit S un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, et Σ un ensemble convexe fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ (les deux non vides). Alors

$$\max_{y\in\Sigma} \inf_{x\in S} \langle y, x\rangle = \inf_{x\in S} \max_{y\in\Sigma} \langle y, x\rangle.$$

Exercice 11. Un tétraèdre est défini comme l'enveloppe convexe de 4 points non coplanaires. Montrer que ces 4 points sont les points extrémaux du tétraèdre (on les appelle les sommets du tétraèdre).

Exercice 12. Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques.

1. Montrer que

$$(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr\,(AB)$$

est un produit scalaire.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_i)_{1 \le i \le n}$ et une famille de réels $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ tels que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T.$$

3. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $A = xx^T$ (comme d'habitude, on identifie des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à des vecteurs colonnes).

4. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives. Soit $\Omega_1 = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid tr\, M = 1\}$.

Montrer que Ω_1 est un convexe compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que Ω_1 est l'enveloppe convexe de $\{xx^T : \|x\| = 1\}$.

Montrer que les points extrémaux de Ω_1 sont les matrices xx^T, $\|x\| = 1$.

Géométrie projective

L'espace projectif est l'espace des droites d'un espace vectoriel. La définition standard est la suivante : on appelle *espace projectif de dimension n sur le corps* $\mathbb{K}$, et on le note $\mathbb{KP}^n$, le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $v \sim w$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $w = \lambda v$. Une fois fixé une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ (ou, de façon équivalente, un système de coordonnées), tout point de $\mathbb{KP}^n$ est donc déterminé par un $(n+1)$-uplet $[x_0 : \ldots : x_n]$ d'éléments pas tous nuls de $\mathbb{K}$ défini à multiplication d'un scalaire non nul près : il s'agit des *coordonnées projectives* ou *homogènes* du point. Les *sous-espaces projectifs de dimension k* de $\mathbb{KP}^n$ sont l'image dans la projection standard $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{KP}^n$ des sous-espaces vectoriels de dimension $k+1$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ privés du zéro. On considère l'ensemble vide comme sous-espace projectif de dimension -1. On appelle *points, droites, plans,..., hyperplans* les sous-espaces de $\mathbb{KP}^n$ de dimension 0, 1, 2,..., $n-1$. Afin de développer votre compréhension topologique des espaces projectifs, essayez de vous convaincre que $\mathbb{RP}^1 = \mathbf{S}^1$, $\mathbb{CP}^1 = \mathbf{S}^2$ (on pourra penser à la compactification d'Alexandroff, ou à la projection stéréographique -voir plus loin) et que $\mathbb{RP}^2$ est obtenu en recollant un disque et un ruban de Möbius le long de leurs bords.

Exercice 1. Déterminer comment changent les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{KP}^n$ si on change la base de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Tout espace affine peut être plongé, de façon naturelle, dans un espace projectif. On considère le sous-espace affine de dimension n $E = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$ contenu dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{n+1}$. La restriction à E de la projection $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{KP}^n$ est une bijection sur son image. En effet, toute droite vectorielle qui n'est pas faiblement parallèle à l'hyperplan affine donné le rencontre exactement en un point. Le complémentaire de l'image (i.e. l'image de $\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 = 0\} \setminus \{0\}$) est un hyperplan projectif de $\mathbb{KP}^n$ appelé *hyperplan à l'infini*. Tout sous-espace affine F de E (vu comme sous-ensemble de $\mathbb{KP}^n$) est l'intersection avec E d'un sous-espace projectif de $\mathbb{KP}^n$ de la même dimension. Celui-ci est la projection du plus petit sous-espace vectoriel contenant F et 0 (i.e. le sous espace affine $\mathcal{A}(F, 0)$). Si $n = 2$, deux droites de $\mathbb{KP}^2$ s'intersectent toujours en un point et il en suit que deux droites de E sont parallèles si et seulement si l'intersection des droites projectives qui les contiennent est contenue dans la droite à l'infini. Ces propriétés sont conséquence du fait que deux plans vectoriels de $\mathbb{K}^3$ s'intersectent toujours le long d'une droite. La projection de cette droite est un point de $\mathbb{KP}^2$ qui est l'intersection de deux droites qui sont projection des deux plans considérés.

On remarque qu'il y a une notion naturelle de *dualité* pour les sous-espaces d'un espace projectif induite par l'isomorphisme entre un espace vectoriel (de dimension finie) et son dual. (Voir aussi plus loin la section coniques). Une dualité est déterminé par un isomorphisme entre $\mathbb{K}^{n+1}$ et $(\mathbb{K}^{n+1})^*$ ou, de façon équivalente, par une forme bilinéaire, non dégénérée, de $\mathbb{K}^{n+1}$. Elle donne une correspondance entre sous-espaces propres de dimension k et sous-espaces de dimension $n-k-1$. Si b est une forme bilinéaire, non dégénérée de $\mathbb{K}^{n+1}$, l'application $v \mapsto b(v, \cdot)$ est un isomorphisme entre $\mathbb{K}^{n+1}$ et $(\mathbb{K}^{n+1})^*$. Considérons maintenant un sous-espace de dimension k de $\mathbb{KP}^n$: par définition il est image par la projection canonique d'un sous-espace vectoriel de dimension $k+1$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. La forme b permet de lui associer le sous-espace W de $\mathbb{K}^{n+1}$ de dimension $n+1-(k+1)$ défini comme $W^{\perp b} = \{v \in \mathbb{K}^{n+1} \mid b(w, v) = 0 \ \forall w \in W\}$. Sa projection sera alors le sous-espace projectif de dimension $n-k-1$ associé au sous-espace projectif de départ. Par exemple, en dimension 2, la correspondance est entre droites et points et elle préserve l'incidence, i.e. a une famille de points alignés correspond une famille de droites ayant un point en commun. Ceci est conséquence du fait que $(W \cap U)^{\perp b} = W^{\perp b} + U^{\perp b}$ et $(W + U)^{\perp b} = W^{\perp b} \cap U^{\perp b}$.

On appelle *polarité* une dualité dont la forme bilinéaire φ associée satisfait : $\varphi(v, w) = 0$ si et seulement si $\varphi(w, v) = 0$. En particulier, une dualité associé à une forme bilinéaire symétrique (ou antisymétrique) est une polarité.

On appelle *homographie* entre deux espaces projectifs toute application induite par une application linéaire injective des sous-espaces vectoriels sous-jacents. En particulier, tout homographie entre deux espaces projectifs de même dimension est une bijection et son inverse est aussi une homographie.

Exercice 2. (*Propriétés des homographies*).

1. Déterminer le groupe des homographies de $\mathbb{KP}^n$ dans lui même en fonction de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$. Donner la forme générale d'une homographie de $\mathbb{KP}^1$ en coordonnées homogènes.

2. Soient P_i et Q_i, $i = 1, 2, 3$, deux familles de trois points deux à deux distincts de $\mathbb{KP}^n$. On suppose que les P_i sont alignés si et seulement si les Q_i le sont. Montrer qu'il existe une homographie $\psi : \mathbb{KP}^n \longrightarrow \mathbb{KP}^n$ telle que $\psi(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3$. Montrer qu'elle est unique si $n = 1$.

3. On appelle *birapport* de quatre points $P_i = [\lambda_i : \mu_i]$, $i = 0, \dots, 3$, de la droite projective $\mathbb{KP}^1$ la quantité $\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3}{\lambda_3\mu_0 - \lambda_0\mu_3} \frac{\lambda_2\mu_0 - \lambda_0\mu_2}{\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2}$. Montrer que le birapport est bien défini (i.e. ne dépend pas du représentant (λ_i, μ_i) choisi). Montrer ensuite que si ψ est une homographie de $\mathbb{KP}^1$ on a

$$\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \mathcal{B}(\psi(P_0), \psi(P_1), \psi(P_2), \psi(P_3)).$$

Calculer $\mathcal{B}(P_{\sigma(0)}, P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)})$ en fonction de $\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ pour toute permutation σ.

4. Montrer que toute bijection de $\mathbb{KP}^1$ qui préserve le birapport est une homographie.

5. Soit ψ une homographie de $\mathbb{KP}^n$. Déterminer si $\{P \in \mathbb{KP}^n \mid \psi(P) = P\}$ est toujours un sous-espace projectif de $\mathbb{KP}^n$ (donner une démonstration en cas affirmatif, un contrexemple sinon).

Exercice 3. (*Théorème de Desargues*) Soient P_i et Q_i, $i = 1, 2, 3$, deux triplets de points deux à deux distincts dans $\mathbb{KP}^2$ tels que $\{P_1, P_2, P_3\} \cap \{Q_1, Q_2, Q_3\} = \varnothing$. Supposons que les trois droites par P_i et Q_i, $i = 1, 2, 3$, sont concourantes. Alors, les points d'intersection des trois paires de droites P_iP_j et Q_iQ_j, $1 \leq i < j \leq 3$, sont situés sur une même droite. Énoncer le dual du théorème de Desargues.

Exercice 4. (*Théorème de Pappus*) Dans $\mathbb{KP}^2$, soient P_i, $i = 1, 2, 3$, trois points deux à deux distincts appartenant à une même droite d, et soient Q_i, $i = 1, 2, 3$, trois autres points deux à deux distincts appartenant à une autre droite d'. On considère les trois points d'intersection entre les droites par P_i et Q_j et par P_j et Q_i, $1 \leq i < j \leq 3$. Ces trois points sont alignés. Énoncer le dual du théorème de Pappus.

Coniques, quadriques

Dans cette partie on va supposer que les corps sont de caractéristique différente de 2 sauf mention du contraire. On appelle *quadrique affine* l'ensemble des zéros d'une équation polynomiale de degré 2, i.e. $\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid P(a_1, \dots, a_n) = 0\}$ où $P \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est de degré 2. Évidemment, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, λP et P déterminent la même quadrique affine. (Remarque : parfois on préfère appeler "quadrique" la donnée d'un polynôme de degré 2 déterminé à multiplication d'un scalaire non nul près, et "image de la quadrique" l'ensemble de ses zéros. On peut donc voir les quadriques comme les points d'un espace projectif...) On appelle *conique* une quadrique de $\mathbb{K}^2$. On considère deux quadriques comme équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par changement de repère affine. On remarque qu'un changement de repère détermine un automorphisme de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ qui préserve le degré. Attention : le changement de repère dépend du contexte ! Si on ne souhaite pas travailler avec des coordonnées, une fonction f sur un espace affine E dirigé par V est un polynôme de degré 2 s'il existe un point $x_0 \in E$, une forme quadratique non nulle q_0, une forme linéaire L_0 sur V et une constante $c_0 \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $x \in E$ on a $f(x) = q_0(\overrightarrow{x_0x}) + L_0(\overrightarrow{x_0x}) + c_0$. En effet, si cela est le cas pour un point x_0 de E, alors cela est le cas pour tout point de E et de plus la forme quadratique ne dépend pas du point choisi. Soit $y_0 \in E$ fixé. On peut écrire $f(x) = q_0(\overrightarrow{x_0y_0} + \overrightarrow{y_0x}) + L_0(\overrightarrow{x_0y_0} + \overrightarrow{y_0x}) + c_0 = q_0(\overrightarrow{y_0x}) + 2B_0(\overrightarrow{x_0y_0}, \overrightarrow{y_0x}) + L_0(\overrightarrow{y_0x}) + q_0(\overrightarrow{x_0y_0}) + L_0(\overrightarrow{x_0y_0}) + c_0$, où B_0 est la forme bilinéaire symétrique associée à q_0.* On voit alors que $2B_0(\overrightarrow{x_0y_0}, \overrightarrow{y_0x}) + L_0(\overrightarrow{y_0x})$ est une forme linéaire et $q_0(\overrightarrow{x_0y_0}) + L_0(\overrightarrow{x_0y_0}) + c_0$ une constante car $\overrightarrow{x_0y_0}$ est fixé.

Exercice 1. On dit qu'un point $x_0 \in E$ est un *centre de la quadrique* si $L_0 = 0$. S'il y a un unique centre on dit que *la quadrique est à centre*. Montrer que $y \in E$ est un centre de la quadrique associée à $f(x) = q(\overrightarrow{x_0x}) + L_0(\overrightarrow{x_0x}) + c_0$ si et seulement si $2B_q(\overrightarrow{x_0y}, \cdot) + L_0(\cdot) = 0$, où B_q dénote la forme bilinéaire symétrique associée à q. Quels sont les centres pour une quadrique donnée en coordonnées ? (Suggestion : on pourra calculer la différentielle de f). Montrer ensuite qu'une quadrique est à centre si et seulement si q est non dégénérée.

On remarque que si une quadrique a un centre, elle admet une symétrie centrale. En effet, si x_0 est un centre, la quadrique s'écrit $f(x) = q(\overrightarrow{x_0x}) + c_0$. Soit $y = x_0 + \overrightarrow{x_0x}$ un point sur la quadrique, à savoir $f(y) = 0$. L'image $y' = x_0 - \overrightarrow{x_0x}$ de y par la symétrie centrale de centre x_0 est encore un point de la quadrique.

Exercice 2.

---

* On rappelle qu'une fonction q définie sur un espace vectoriel V et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une forme quadratique si pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in V$ on a $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ et de plus l'application $B_q : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $(v, w) \mapsto (q(v + w) - q(v) - q(w))/2$ (ou par $(v, w) \mapsto (q(v + w) - q(v - w))/4$) est une forme bilinéaire symétrique appelée la *forme polaire de q*. L'égalité $(q(v + w) - q(v) - q(w))/2 = (q(v + w) - q(v - w))/4$ qu'on peut aussi récrire comme $(q(v + w) + q(v - w))/2 = q(v) + q(w)$ s'appelle *identité du parallélogramme*. Un exercice instructif montre qu'une norme est induite par un produit scalaire si et seulement si son carré satisfait cette identité (donc si et seulement s'il est une forme quadratique).

1. Classifier les coniques affines de $\mathbb{R}^2$ et celles de $\mathbb{C}^2$ (à changement de coordonnées affines près). Idem pour les quadriques de $\mathbb{R}^3$.

2. Classifier les coniques euclidiennes de $\mathbb{R}^2$ (à changement de coordonnées cartésiennes -i.e. isométriques- près). Rappeler leurs propriétés, à savoir, leur description comme particulier lieux de points (définition par foyers et directrices et définition bifocale).

3. Montrer que toute conique (affine) non dégénérée de $\mathbb{R}^2$ est intersection du cône (une quadrique) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ de $\mathbb{R}^3$ avec un plan affine. Parmi les coniques dégénérées, lesquelles sont obtenues de cette façon ?

Exercice 3. Quelques propriétés des coniques euclidiennes (on ne considérera ici que les coniques propres : ellipses, hyperboles et paraboles).

1. Montrer que les coniques sont des courbes paramétrées en donnant des équations paramétrées explicites.

2. Montrer que la droite qui joint le centre d'une ellipse au milieu d'une corde MM' passe par le point commun aux tangentes à l'ellipse en M et M'.

3. Donner une expression explicite de la tangente à une conique, sous forme cartésienne, puis sous forme paramétrée. Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle la coupe en un unique point. Cette propriété reste-t-elle vraie pour les paraboles et les hyperboles ?

4. (Propriétés optiques des coniques) Montrer que la tangente à une ellipse en un point est l'une des bissectrices de l'angle formé par les deux droites qui relient le point aux foyers. En considérant toutes les ellipses et hyperboles cofocales (les foyers étant fixés) déduire une propriété analogue pour les hyperboles. Soit P un point sur une parabole. Montrer que l'angle aigu entre la tangente en P et la droite qui joint P au foyer est égal à l'angle aigu entre la même tangente et la droite par P parallèle à l'axe focal.

5. On considère une conique définie par foyer et directrice. Soit M un point sur la conique. On considère la droite orthogonale à MF en F. Soit P le point d'intersection de cette droite avec la directrice. Montrer que PM est la tangente en M à la conique.

6. On considère une conique définie par foyer F et directrice d. Soient M et N deux points sur la conique. Soit P le point d'intersection de la droite par ces deux points et de la directrice. La droite par P et F est une bissectrice de l'angle $\angle MFN$. (On remarque qu'en passant à la limite lorsque $N \to M$ on obtient la propriété vue au point 5.)

7. Déterminer le lieu géométrique des points d'où on peut mener deux tangentes à une ellipse donnée qui sont orthogonales entre elles (*cercle orthoptique* ou *de Monge*).

Exercice 4. Montrer que les orbites gravitationnelles sont des coniques. (Passer en coordonnées polaires, utiliser la conservation de l'énergie et du moment angulaire).

Quadriques de l'espace projectif

Souvent il est avantageux de considérer des *quadriques projectives*. Une quadrique projective de $\mathbb{KP}^n$ est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène de degré 2 dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. On voit facilement que être zéro d'un polynôme homogène ne dépend pas du choix de coordonnées homogènes d'un point. Une quadrique projective peut aussi être vue comme la projection des vecteurs de $\mathbb{K}^{n+1}$ qui annulent une forme quadratique (ces vecteurs forment un cône dans $\mathbb{K}^{n+1}$: le *cône isotrope*). Clairement deux quadriques projectives sont équivalentes (on peut passer de l'une à l'autre par changement de coordonnées homogènes) si les formes quadratiques associées le sont (l'autre implication est seulement vraie à multiplication d'un scalaire non nul près).

Exercice 5. Classifier les quadriques projectives sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. (Attention sur $\mathbb{C}$ à ne pas confondre formes bilinéaires symétriques et hermitiennes).

On voit sans difficulté que la trace (i.e. intersection) d'une quadrique projective (différente de $x_0^2 = 0$) sur l'espace affine $\{P \in \mathbb{KP}^n \mid x_0 \neq 0\}$ est une quadrique affine dont l'équation est obtenue en *deshomogénéisant* le polynôme qui définit la quadrique. Si $H(x_0, \ldots, x_n)$ est un polynôme homogène de degré d, le polynôme $H(1, \ldots, x_n)$ est un polynôme de $\mathbb{K}[x_1 \ldots, x_n]$ de degré au plus d dont les zéros sont l'intersection des zéros de $H(x_0, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{KP}^n$ avec l'espace affine $\{x_0 = 1\}$. Réciproquement, on peut trouver une quadrique projective dont la trace sur l'espace affine $\{P \in \mathbb{KP}^n \mid x_0 \neq 0\}$ est une quadrique affine donnée en *homogénéisant* le polynôme qui la définit. Si $f(x_1 \ldots, x_n)$ est un polynôme de $\mathbb{K}[x_1 \ldots, x_n]$ de degré d on obtient un polynôme homogène de degré d en considérant $x_0^d f(x_1/x_0 \ldots, x_n/x_0)$. Les zéros de $x_0^d f(x_1/x_0 \ldots, x_n/x_0)$ appartenant à $\{x_0 = 1\}$ sont précisément les zéros de f. On dit qu'une quadrique affine est *propre* si elle est la trace d'une quadrique projective non dégénérée.

Exercice 6. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, on considère les coniques projectives de $\mathbb{KP}^2$ dans leur forme standard (voir exercice précédent). Montrer que toute conique affine de $\mathbb{K}^2$ à changement de coordonnées près peut être obtenue comme $\mathcal{C} \setminus L$ pour un choix de conique projective $\mathcal{C}$ et de droite projective L. Quelles sont les coniques propres ?

Exercice 7. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini (ici on ne supposera pas que la caractéristique n'est pas 2). Montrer que la conique affine de $\mathbb{K}^2$ définie par l'équation x^2+y^2+a, avec $a \in \mathbb{K}$ n'est jamais vide. Montrer que les hypothèses "$\mathbb{K}$ est un corps" et "$\mathbb{K}$ est fini" sont nécessaires.

Exercice 8. (*Théorème de Pascal*) Six points P_i, Q_i, $i = 1, 2, 3$, dont trois ne sont jamais alignés, sont sur une même conique si et seulement si les trois points d'intersection entre les droites par P_i et Q_j et par P_j et Q_i, $1 \leq i < j \leq 3$ sont alignés. En particulier, si un hexagone est inscrit dans une conique (du plan projectif réel) alors les points d'intersection des côtés opposés sont alignés.

Exercice 9. (*Polarité*) Soit ρ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie et soit L l'ensemble des sous-espaces vectoriels propres de V. On considère l'application $P : L \longrightarrow L$ définie par $P(W) = \{v \in V \mid \rho(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$.

1. Montrer que $\dim W + \dim P(W) = \dim V$, que $P \circ P(W) = W$ et que $U \subset W$ si et seulement si $P(U) \supset P(W)$. Expliciter $P(U \cap W)$ et $P(U + W)$ en fonction de $P(U)$ et $P(W)$. Déduire que P induit une application P' entre les sous-espaces de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. Vérifier que si $q \in \mathbb{P}(\mathbb{K}^3)$ est un point sur la conique associée à ρ alors $P'(q)$ est la droite tangente (i.e. la droite avec un seul point d'intersection avec la conique) en q à la conique.

2. Utiliser 1 et le théorème de Pascal pour démontrer le *théorème de Brianchon* : Soient ℓ_i, $i = 1, \ldots, 6$ six droites tangentes à une conique irréductible (à savoir, la forme bilinéaire associée est non dégénérée). Les trois droites qui passent par les trois paires de points d'intersection $\ell_i \cap \ell_{i+1}$ et $\ell_{i+3} \cap \ell_{i+4}$ (indices mod 6) ont un point commun.

3. On considère le plan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{RP}^2$ et la conique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Soient P un point et d une droite du plan. Construire géométriquement la droite polaire à P et le point polaire à d (par rapport à $\mathcal{C}$).

4. Montrer que l'intersection des tangentes à une conique à centre aux extrémités d'une corde focale appartient à la directrice.

Résultant

Exercice 1. Soit A un anneau factoriel et P, Q deux polynômes de $A[X]$ de degré respectif m et n strictement positifs. On note $P \wedge Q$ le pgcd de P et Q.

1. Montrer que le pgcd $P \wedge Q$ de P et Q est un polynôme non constant si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $\deg U < n$, $\deg V < m$ et $UP + VQ = 0$.

2. On désigne par $A[X]_d$ le A module libre des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Soit f l'application A-linéaire suivante :

$$f : (U, V) \in A[X]_{n-1} \times A[X]_{m-1} \to UP + VQ \in A[X]_{m+n-1}$$

On appelle résultant de P et Q et l'on note $\mathcal{R}(P, Q)$ le déterminant de l'application f calculé dans les bases

$$((X^{n-1}, 0), ..., (1, 0), (0, X^{m-1}), ..., (0, 1)) \quad \text{et} \quad (X^{m+n-1}, ..., 1).$$

Notons $P = p_m X^m + ... + p_0$ et $Q = q_n X^n + ... + q_0$. Montrer que

$$\mathcal{R}(P,Q) = \det \begin{pmatrix} p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 & & & \\ & p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 \\ q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & & \\ & q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 \end{pmatrix}$$

Les n premières lignes sont construites à partir des coefficients de P, les m dernières à partir de ceux de Q. Les entrées non spécifiées sont nulles. On remaquera que $\mathcal{R}(P,Q) = (-1)^{mn}\mathcal{R}(Q,P)$ et que $\mathcal{R}(P(X-a), Q(X-a)) = \mathcal{R}(P(X), Q(X))$.

3. Montrer que $P \wedge Q$ est un polynôme non constant si et seulement si $\mathcal{R}(P,Q) = 0$ (on pourra considérer le corps des fractions K de A et l'application $\hat{f} : K[X]_{n-1} \times K[X]_{m-1} \to K[X]_{m+n-1}$ construite sur le modèle de f). Montrer de plus que $\mathcal{R}(X-a, Q) = Q(a)$.

4. $\mathcal{R}(P,Q)$ est un polynôme homogène de degré m dans les p_i et degré n dans les q_i.

5. Supposons que $A = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_k]$ et de plus P et Q sont des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_k, X]$. Montrer que $\mathcal{R}(P,Q)$ est un polynôme homogène de $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_k]$ de degré nm.

6. Montrer qu'il existe deux polynômes U et V tels que $\deg U < n$, $\deg V < m$ et $UP + VQ = \mathcal{R}(P,Q)$.

7. Soit F une extension de K sur laquelle P et Q sont complètement scindés : $P = p_m \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ et $Q = q_n \prod_{j=1}^n (X - \beta_j)$. Montrer qu'on a alors

$$\mathcal{R}(P,Q) = p_m^n q_n^m \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) = p_m^n \prod_{i=1}^m Q(\alpha_i) = (-1)^{mn} q_n^m \prod_{j=1}^n P(\beta_j).$$

Le résultant est souvent utilisé pour éliminer des variables :

Exercice 2.

1. Calculer le résultant $\mathcal{R}_Y(P,Q)$ des polynômes $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ par rapport à la variable Y (autrement dit, on considère P et Q comme des polynômes à coefficients dans $A = \mathbb{R}[X]$). En déduire comment trouver les points d'intersection des ellipses d'équation $P = 0$ et $Q = 0$.

2. Donner l'équation implicite de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 1, \\ y(t) = t^2 + t \end{cases}$$

On pourra considérer les polynômes $X - T^2 - 1$ et $Y - T^2 - T$ et éliminer T.

Le résultant d'un polynôme et de sa dérivée est appelé *discriminant*. Pour un polynôme de degré 2 $ax^2 + bx + c$ un calcul élémentaire montre que le discriminant vaut $-a(b^2 - 4ac)$: ce discriminant est donc nul si le discriminant usuel est nul (ou si le polynôme n'a pas degré 2).

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'utiliser le résultant pour déterminer quelques propriétés des *cubiques* sur $\mathbb{C}$. Une cubique (affine) est définie comme l'ensemble des zéros d'un polynôme P de degré 3 de $\mathbb{C}[x, y]$. On va considérer seulement des cubiques lisses et on va considérer la cubique comme la trace d'une cubique (lisse) projective qui est l'ensemble des zéros du polynôme homogène $P_h(x, y, z) = z^3 P(x/z, y/z)$. On peut montrer, en raisonnant comme pour les coniques et quadriques, qu'à changement de coordonnées projectives près, le polynôme P est de la forme $P(x, y) = y^2 - x(x-1)(x-c)$, avec $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.*

On se propose de montrer qu'une cubique projective lisse a neuf points d'inflexion trois à trois alignés.

1. Montrer que la cubique projective d'équation $P_h(x, y, z) = 0$ contient un seul point qui n'appartient pas à sa trace affine d'équation $P(x, y) = 0$ et que ce point est un point d'inflexion. On déterminera aussi l'équation de sa tangente.

2. On considère la matrice hessienne de P_h. Son déterminant est un polynôme homogène en x, y, z. Soit $H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ le polynôme obtenu en posant $z = 1$ dans le déterminant. Montrer qu'un point (a, b) sur la conique est un point d'inflexion si et seulement si $H(a, b) = 0$. (On remarquera que ceci est le cas pour toute courbe définie par une équation polynomiale).

3. Calculer explicitement $H(x, y)$, puis $\mathcal{R}_y(P, H)$. Déterminer le nombre de points d'inflexion de la cubique. (On pourra utiliser aussi le discriminant pour

---

* Pour obtenir cette écriture on commence par remarquer qu'une conique lisse a au moins un point d'inflexion. Ceci est une conséquence du théorème de Bézout appliqué à l'intersection de la conique avec sa hessienne, qui a degré 3. On se place dans un système de coordonnées projectives dans lequel le point d'inflexion a comme droite tangente la droite à l'infini. Ensuite on travaille avec la trace affine de la cubique et on raisonne comme pour les coniques, tout en préservant la position choisie pour le point d'inflexion à l'infini. On obtient un polynôme de la forme $y^2 - f(x)$, où $f(x)$ est un polynôme de degré 3 en x. Si la conique est lisse, ses racines sont nécessairement distinctes. À changement de coordonnées affines près on peut supposer qu'il s'agit de 0, 1, c. Évidemment, selon les racines qu'on choisit d'envoyer sur 0 et 1, la troisième racine change. En tenant compte que le birapport des trois racines et du point d'inflexion à l'infini est préservé par transformations affines, on déduit que deux cubiques définies par deux équations de cette forme, avec paramètres c et c' respectivement, sont projectivement équivalentes si et seulement si $c' \in \{c, \frac{1}{c}, \frac{c}{c-1}, 1 - \frac{1}{c}, \frac{1}{1-c}, 1 - c\}$.

établir le nombre exact de racines distinctes de $\mathcal{R}_y(P,H)$).

4. Vérifier que pour chaque point d'inflexion A sur la cubique il y en a un autre qui est contenu dans la droite par A et par l'unique point à l'infini de la cubique.

On déduit de cela que on peut trouver dans le plan projectif complexe des ensembles finis de points tels que pour toute paire de points de l'ensemble il y un troisième point aligné avec les precedents, sans que les points de l'ensemble fini soient tous alignés. On peut montrer que ce type d'ensemble ne peut pas exister dans le plan projectif réel, a cause du fait que $\mathbb{R}$ est ordonnée. (Cherchez une preuve de ce fait !)

Une cubique projective lisse admet une structure de groupe abélien. Soit O le point à l'infini de la cubique. Soient A et B deux points de la cubique. On considère la droite par A et B (si les points sont confondus, on prendra la tangente à la cubique au point). Cette droite intersecte la cubique projective en un troisième point C (qui peut éventuellement coïncider avec A ou B). On pose $A+B=O$ si $C=O$ et, sinon, $A+B=C'=(x_C,-y_C)$, où (x_C,y_C) sont les coordonnées de C.

5. Montrer qu'il s'agit bien d'une structure de groupe abélien. (Une cubique lisse est aussi appelée *courbe elliptique*. Comme groupe de Lie, elle n'est rien d'autre que $\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1=U(1)\times U(1)$, voir le point 8).

6. Déterminer les points de la cubique qui correspondent aux éléments de 2-torsion et 3-torsion du groupe.

7. Montrer que la cubique admet une involution qui est aussi un automorphisme du groupe abélien.

8. † On se propose de comprendre la structure topologique de la cubique $\mathcal{C}$. On travaillera ici avec la cubique pour laquelle $c=-1$. Vérifier que l'application $\mathcal{C}\longrightarrow\mathbb{CP}^1$ définie par $(a,b)\mapsto[a:1]$ et $O\mapsto[1:0]$ est continue et surjective. Vérifier que l'image réciproque d'un point de $\mathbb{CP}^1$ contient au plus deux points et trouver les $[a:t]$ pour lesquels l'image réciproque ne contient qu'un point. Déduire que l'image réciproque de l'ouvert $\Im(\alpha)>0$ (respectivement $\Im(\alpha)<0$) est constituée de deux disques. Obtenir $\mathcal{C}$ en recollant les adhérences de ces quatre disques le long de l'image réciproque de la droite projective réelle de partie affine $\Im(\alpha)=0$. Quelle surface obtient-on ? Quelle structure de groupe admet-elle ?

On peut aussi utiliser le résultant pour montrer que l'ensemble des entiers algébriques forme un anneau, ou que celui des nombres algébriques forme un corps. Une autre possible application est la preuve de la loi de réciprocité quadratique.

Courbes algébriques dans le plan projectif

On a déjà étudié les coniques et certaines cubiques du plan projectif $\mathbb{KP}^2$. Plus généralement on peut s'intéresser à d'autres courbes du plan projectif qui sont obtenues comme ensembles des zéros d'un polynôme homogène non constant de

$\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ défini à multiplication d'un scalaire non nul près. Le résultat suivant est fondamental dans l'étude de ces courbes et on l'a déjà exploité plusieurs fois. Sa preuve est une application des propriétés du résultant.

Exercice 4. Le but de l'exercice est de prouver le *théorème de Bézout* : soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux courbes de $\mathbb{KP}^2$ définies par deux polynômes homogènes F et G de degré $d > 0$ et $d' > 0$ respectivement. On suppose que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et que le pgcd de F et G est constant. Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'intersectent en dd' points si ceux-ci sont comptés en tenant compte de leur *multiplicité d'intersection*.

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est un ensemble fini.

2. Soit $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{P_1, \ldots, P_r\}$. Pour tous $i \neq j$, soit ℓ_{ij} la droite par P_i et P_j. Justifier l'existence d'un point Q tel que $Q \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \cup_{1 \leq i < j \leq r} \ell_{ij}$. Dans la suite, on choisira des coordonnées projectives telles que $Q = [1 : 0 : 0]$.

3. On considère $F = \sum_{i=1}^{d} A_i x_0^{d-i}$ et $G = \sum_{j=1}^{d'} B_j x_0^{d'-j}$ où les A_i et les B_j sont des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ de degré i et j respectivement. En tenant compte de 2, vérifier que A_0 et B_0 ne sont pas nuls. Vérifier ensuite que $\mathcal{R}(F, G)_{x_0}$ est de la forme $\prod_{s=1}^{r} (c_s x_1 - b_s x_2)^{m_s}$, où $[a_s : b_s : c_s]$ sont les coordonnées du point P_s. On appelle m_s la *multiplicité d'intersection du point P_s* (si P est un point qui n'est pas dans $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ cette multiplicité vaut 0). Expliquer pourquoi cela est bien défini.

4. Utiliser le point précédent pour démontrer le théorème de Bézout (il faut vérifier que pour toute racine du résultant il y a une seule racine commune aux polynômes).

En vrac : quelques applications et approfondissements.

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1. Utiliser les nombres complexes pour démontrer :

1. Le *théorème de Morley* : les trisectrices des angles d'un triangle non aplati se coupent dans les sommets d'un triangle équilatéral.

2. Le *théorème de Napoléon* : si l'on construit trois triangles équilatéraux sur les côtés d'un triangle quelconque, tous à l'extérieur ou tous l'intérieur, les centres de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes un triangle équilatéral.

Constructions à la règle et au compas

Vous avez très probablement déjà traité ce sujet dans le cours d'algèbre/théorie des corps.

Exercice 2. On se donne une unité de mesure dans le plan, i.e. un segment de longueur 1 sur l'axe des x. On essaie de comprendre quelles constructions géométriques sont possibles à l'aide d'une règle (sans unités de mesure) et d'un compas. On appelle *constructible* tout nombre réel qu'on peut déterminer sur l'axe des x à l'aide d'une règle et d'un compas.

1. Montrer que les nombres constructibles forment un corps.

2. Montrer que si a est constructible et positif alors $\sqrt{a}$ l'est aussi.

3. Montrer que si a n'est pas rationnel mais il est constructible le degré $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ est une puissance non triviale de 2. En déduire qu'on ne peut pas construire à la règle et au compas un carré dont l'aire est la même de celle d'un disque donné.

4. Les deux racines réelles du polynôme $x^4 - 2x - 2$ ne sont pas constructibles. Chercher une justification de ce fait.

5. Montrer qu'il n'est pas possible de trisecter un angle d'amplitude $\pi/3$ à l'aide d'une règle et d'un compas. (Montrer d'abord que cela équivaut à prouver que $\cos(\pi/9)$ n'est pas constructible).

6. Montrer (si possible avec une construction explicite) qu'on peut construire, à l'aide d'une règle et d'un compas, un pentagone mais qu'il n'est pas possible de construire un heptagone ou un ennéagone. (Pour l'heptagone montrer que $2\cos(2\pi/7)$ est racine de l'équation $x^3 + x^2 - 2x - 1$.) Donner une condition nécessaire afin qu'un polygone avec un nombre premier ≥ 3 de côtés soit constructible. (Il y a une caractérisation de ces nombres premiers donnée par le *théorème de Gauss-Wantzel*).

Projection stéréographique

Dans l'exercice qui suit on étudie les propriétés de la projection stéréographique en dimension 2. Ces propriétés restent valables en toute dimension. On peut montrer qu'il n'y a aucune application isométrique d'un ouvert de $\mathbf{S}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Cet exercice montre, en revanche, (point 4) qu'il y a des applications continues et injectives définies sur un ouvert de la sphère et à valeurs dans un ouvert du plan qui préservent les angles. La projection stéréographique montre aussi que la sphère $\mathbf{S}^n$ est la *compactification (ou le compactifié) d'Alexandroff* de $\mathbb{R}^n$: on peut prouver que, si X est un espace topologique localement compact, il existe un unique espace topologique compact Y qui contient X comme sous-espace et tel que $Y \setminus X$ est réduit à un point. L'espace Y s'appelle la compactification d'Alexandroff de X.

Exercice 3. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la sphère $\mathbf{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ et le plan $\mathbb{R}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

1. On considère l'application $\mathbf{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie de la façon suivante : soit Q un point de la sphère différent de $P = (0,0,1)$, et soit d_Q la droite par Q et P. On associe à Q le point de d_Q qui appartient à $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application est bien définie, donner sa description analytique et déduire qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

2. Soit S une sphère quelconque de $\mathbb{R}^3$ et Π un plan. Montrer que $\mathbb{R}^3 \cap \Pi$ est soit vide, soit un point, soit un cercle. (Utiliser des isométries pour se ramener à des sphères concentriques à $\mathbf{S}^2$ et des plans parallèles à $\mathbb{R}^2$). Déduire que l'image réciproque d'une droite de $\mathbb{R}^2$ est un cercle de $\mathbf{S}^2$ qui passe par P (moins le point P).

3. Montrer que l'image réciproque de tout cercle de $\mathbb{R}^2$ est un cercle de $\mathbf{S}^2$ qui ne passe pas par P.

4. Montrer que l'application préserve les angles (sans être une isométrie).

Inversion dans un cercle

Les inversions aussi peuvent être définies en toute dimension. On a ici d'autres exemples d'applications qui ne sont pas des isométries mais qui préservent les angles.

Exercice 4. On appelle *inversion* par rapport à un cercle du plan euclidien l'application définie sur le plan privé du centre O du cercle dans lui-même qui à tout point P associé le point Q qui se trouve sur la demi-droite d'origine O passant par P et tel que $\overline{OP} \times \overline{OQ}$ est égal au carré du rayon du cercle.

1. Donner une expression analytique de cette application qui utilise les nombres complexes. Déduire que l'application est un homéomorphisme et qu'elle coïncide avec sa réciproque.

2. Montrer que l'application envoie une droite par O (moins O) dans elle-même, une droite qui ne contient pas O en un cercle qui contient O privé de O, et un cercle dans un cercle.

3. Montrer que l'application ne préserve pas les distances mais qu'elle préserve les angles.

4. On considère $\mathbb{C}$ comme droite affine contenue dans la droite projective $\mathbb{CP}^1$. Soit P un point de $\mathbb{C}$. Déterminer toutes les homographies qui envoient P sur le point à l'infini et ce dernier sur le conjugué de P. Voyez-vous un lien avec les inversions de centre P ?

5. Soit s la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $x_3 = 0$ et soit p la projection stéréographique vue dans l'exercice 3. Montrer que là où elle est définie, l'application $p \circ s \circ p^{-1}$ coïncide avec l'inversion dans le cercle de rayon 1 et centre l'origine dans le plan $x_3 = 0$ (qu'on pourra identifier avec $\mathbb{C}$).

Géodésiques

Dans cette partie on s'intéresse à des distances induites par des *métriques riemanniennes*.

Exercice 5. Soit D une sous-variété connexe ouverte ou fermée de $\mathbb{R}^n$* et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. Pour tous $P, Q \in D$ on pose $\Gamma(P,Q)$ l'ensemble des chemins entre P et Q contenus dans D qui sont C^1 par morceaux, i.e. $\gamma \in \Gamma(P,Q)$ est une application continue, définie sur un intervalle

* Une sous-variété ouverte est tout simplement un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une sous-variété fermé est un fermé qui est localement le graphe d'une fonction lisse.

fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans D et telle que $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = Q$ et γ est C^1 sur I privé d'un ensemble fini de points.

1. Supposons que, pour tous $P, Q \in D$, $\Gamma(P, Q)$ est non vide. Montrer que l'application

$$d(P, Q) = \inf_{\gamma \in \Gamma(P,Q)} \int_a^b \|\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\| f(\gamma(t))\, \mathrm{d}t,$$

où $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne, est une distance sur D.

On appelle *géodésique entre P et Q par rapport à la distance d* tout chemin $\gamma \in \Gamma(P, Q)$ qui réalise l'inf. On dit qu'un espace métrique est *géodésique* s'il y a toujours une géodésique entre toute paire de points de l'espace. On remarque qu'on peut donner une définition de sous-espace convexe dans ce contexte en remplaçant les segments (de droite) entre deux points de la définition usuelle, par les géodésiques entre deux points. (Attention ! contrairement aux segments de droite du cas affine, il peut y avoir plusieurs géodésiques entre deux points et il faut toutes les prendre.)

2. Montrer que si $D = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in D$, alors la distance définie au point 1 coïncide avec la distance (euclidienne) usuelle et que le segment entre deux points est une géodésique.

3. Soit $D = \mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unitaire et soit $f(x) = 1$ pour tout $x \in D$. Montrer que le plus petit arc de grand cercle d'extrémités deux points donnés est une géodésique entre les deux points. (On rappelle qu'un grand cercle est l'intersection de la sphère avec un plan vectoriel, i.e. passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$.) Déduire la distance entre deux points de la sphère. Montrer que la distance ainsi définie induit la topologie naturelle de $\mathbf{S}^2$.

4. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ et soit $f(x, y) = y$. Montrer que le segment vertical entre $P = (x, y_1)$ et $Q = (x, y_2)$ est une géodésique et calculer $d(P, Q)$. D avec cette distance est appelé *(le modèle du demi-plan du) plan hyperbolique* et est noté $\mathbf{H}^2$.

Le modèle du demi-plan du plan hyperbolique

Exercice 6.

1. Montrer que toute inversion dans un cercle de $\mathbb{R}^2$ dont le centre appartient à l'axe des x induit un homéomorphisme de $\mathbf{H}^2$ qui, de plus, est une isométrie.

2. Soit $\mathcal{C}$ un demi-cercle (ouvert) contenu dans le demi-plan supérieur (et centré sur l'axe des x). Déduire de 1 qu'il existe une isométrie de $\mathbf{H}^2$ qui envoie $\mathcal{C}$ sur une demi-droite verticale. Utiliser l'exercice 5 pour déterminer une géodésique entre deux points quelconque de $\mathbf{H}^2$.

3. On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$. Montrer que toute application de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bd = 1$, est une isométrie de $\mathbf{H}^2$. Ces isométries forment un sous-groupe dans un groupe que vous avez déjà rencontré : lequel ?

La sphère et le plan hyperbolique sont deux exemples de géométries non euclidiennes, à savoir ne satisfaisant pas l'axiome des parallèles*. En effet, toute paire de géodésiques sur une sphère se rencontre en deux points, alors qu'étant donné une géodésique du plan hyperbolique et un point qui n'y appartient pas on trouve une infinité de géodésiques passant par le point et qui ne rencontrent pas la géodésique de départ. On a déjà vu un autre exemple de géométrie non euclidienne : il s'agit du plan projectif où deux droites non confondues se rencontrent toujours en un point. L'un des avantages de l'espace projectif est en effet celui d'être plus "homogène" que l'espace affine.

Exercice 7. Calculer l'aire d'un triangle du plan hyperbolique (ses côtés étant des segments géodésiques). Déduire qu'il y a une unique géodésique entre deux points de $\mathbf{H}^2$.

Triangles sphériques

Exercice 8. Déterminer l'aire d'un triangle sur la sphère de rayon R dont les côtés sont des arcs de grand cercle. Déduire que la somme des angles d'un triangle sphérique est $> \pi$. On rappelle que l'*angle solide* correspondant à un morceau de sphère est le rapport entre l'aire du morceau et le rayon au carré.

* L'approche axiomatique d'Euclide à la géométrie a donné lieu à différents développements. On a cherché longtemps à trouver un "système suffisant d'axiomes indépendants" (à savoir, les axiomes permettent de déduire les propriétés qu'on veut, il y a des "objets" satisfaisant les axiomes et, à chaque axiome qu'on rajoute, le "nombre" d'objets les satisfaisant diminue), jusqu'aux travaux de Hilbert (http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf), par exemple. Puis Gödel est arrivé...