

MASTER 1 DE MATHÉMATIQUES

Topologie, 1er semestre

Luisa Paoluzzi

Le programme du cours sera divisé en deux parties principales : dans un premier temps on reprendra le programme de topologie générale de L3, avec un point de vue peut-être plus abstrait, ensuite on présentera quelques résultats de topologie algébrique.

En gros, le but de la topologie algébrique est d'étudier des *invariants algébriques* afin de pouvoir distinguer les espaces topologiques (non homéomorphes, par exemple) : il est facile de démontrer qu'un droite et un cercle ne peuvent pas être homéomorphes (pourquoi ?), mais il n'est pas si aisé de prouver qu'une sphère et un tore ne le sont pas. À la fin de ce cours nous serons capables de donner une démonstration rigoureuse de ce fait en utilisant le *groupe fondamental* d'un espace topologique connexe par arcs. En effet, cette partie du cours sera centrée sur l'étude du groupe fondamental, ses possibles définitions et son utilisation. Comme le nom du cours l'indique, nous aurons besoin de dédier une partie du cours à l'algèbre, notamment il faudra apprendre des bases de théorie combinatoire des groupes (notion de groupe libre, produit libre et somme amalgamée de groupes, présentation d'un groupe, etc.)

Attention ! les exercices proposés en TD font partie du programme du cours.

1. Rappels de topologie générale

Ce chapitre comporte principalement des notions qui sont au programme en L3. Il est important de bien maîtriser les notions suivantes :

- * *espaces topologiques et métriques* ;
- * *topologies induites*, i.e. *topologie initiale* (comme la topologie produit) et *finale* (comme la topologie quotient) ;
- * *compacité* ;
- * différentes notions de *connexité*.

1.1 Notions de base

Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'une *topologie*, à savoir, d'un sous-ensemble τ de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X , satisfaisant les trois axiomes suivants :

- 1 $X, \emptyset \in \tau$,
- 2 pour tout sous-ensemble $\gamma \subset \tau$ on a $\cup_{A \in \gamma} A \in \tau$,
- 3 pour tout couple $A, B \in \tau$ on a $A \cap B \in \tau$.

Les éléments de τ s'appellent *ouverts* de la topologie, alors que les sous-ensembles de X de la forme $X \setminus A$, où $A \in \tau$, s'appellent *fermés*. On peut définir un espace topologique de façon “duale” en utilisant la famille de ses fermés (satisfaisant trois axiomes “duaux”) à la place de τ .

Soient τ et τ' deux topologies définies sur un même ensemble X . On dit que τ est *plus fine* de τ' si $\tau \supset \tau'$ (comme sous-ensembles de $\mathcal{P}(X)$). Cela définit un ordre partiel sur les topologies définies sur X . Cet ordre admet maximum (la topologie *discrète*) et minimum (la topologie *triviale* ou *grossière*).

Soient (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques, et soit $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ une fonction. On dit qu'elle est *continue* si pour tout $A \in \tau_Y$ on a $f^{-1}(A) \in \tau_X$. On dit qu'une fonction continue est un *homéomorphisme* si elle est inversible et son inverse est, elle aussi, continue. Deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre eux. Une fonction obtenue en composant des fonctions continues est elle-même continue.

Soient τ une topologie sur X et $x \in X$ un point. Un *voisinage* U de x est un sous-ensemble de X tel qu'il existe $A \in \tau$ satisfaisant $x \in A \subset U$. Un *voisinage ouvert* de x est simplement un ouvert contenant x . On note \mathcal{U}_x la famille des voisinages de x .

Définition : Un *système fondamental de voisinages de x* est une famille $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ telle que pour tout $U \in \mathcal{U}_x$ il existe $V \in \mathcal{V}_x$ tel que $V \subset U$.

Il découle immédiatement des définitions que les voisinages ouverts d'un point forment un système fondamental de voisinages.

Définition : Une fonction f est *continue en un point x* si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x .

Il est facile de voir qu'une fonction est continue en tout point si et seulement si elle est continue.

Définitions : Soit (X, τ) un espace topologique. Un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \tau$ est une *base* de la topologie τ si tout élément de τ peut-être obtenu comme union d'éléments de \mathcal{B} . Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \tau$ est une *pré-base* (ou *sous-base*) de la topologie τ si tout élément de τ peut-être obtenu comme union d'intersections finies d'éléments de \mathcal{S} .

À titre d'exemple, les intervalles ouverts de \mathbb{R} constituent une base pour la topologie de \mathbb{R} , tandis que les intervalles ouverts et non bornés constituent une pré-base qui n'est pas une base. Que peut on dire de la famille des intervalles ouverts et non-bornés à gauche (plus l'ensemble vide) ?

On a les propriétés suivantes :

1. Un sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est une pré-base de la topologie τ si et seulement si τ est la plus petite topologie qui contient \mathcal{S} .

2. Soit \mathcal{B} une base pour τ . \mathcal{B} est alors un recouvrement de X et, si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ avec $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, alors pour tout $x \in B_1 \cap B_2$ il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$. De plus, si X est un ensemble et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfait les deux propriétés qu'on vient de voir, alors il existe une unique topologie sur X pour laquelle \mathcal{B} est une base.
3. Soit (X, τ) un espace topologique. $\mathcal{B} \subset \tau$ est une base de la topologie si et seulement si, pour tout $x \in X$, la famille $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ est un système fondamental de voisinages.
4. Soient (X, τ) et (X', τ') deux espaces topologiques, \mathcal{B}' une base pour τ' , et $f : X \rightarrow X'$ une fonction. On a que f est continue si et seulement si $f^{-1}(B') \in \tau$ pour tout $B' \in \mathcal{B}'$.

1.2 Espaces métriques, métrisables

Une *distance* (ou *métrique*) d sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- 1 $d(x, x') \geq 0$ et $d(x, x') = 0$ si et seulement si $x = x'$ (*positivité*),
- 2 $d(x, x') = d(x', x)$ pour tous $x, x' \in X$ (*symétrie*),
- 3 $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ pour tous $x, x', x'' \in X$ (*inégalité triangulaire*).

Dans un espace métrique (X, d) , un sous-ensemble de la forme $\{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ se note $B(x, r)$ et s'appelle *boule ouverte de centre x et rayon r* , où $r > 0$. Si l'on remplace la condition $d(x, y) < r$ par la condition $d(x, y) \leq r$, l'ensemble obtenu est dit *boule fermée*.

On peut montrer (exercice) qu'un espace métrique admet une topologie naturelle induite par la métrique pour laquelle les boules ouvertes constituent une base. Un espace topologique (X, τ) est *métrisable* s'il existe une métrique qui induit τ .

On rappelle aussi la notion de suite de Cauchy : une suite de points $\{x_n\}$ dans un espace métrique est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous entiers $p, q \geq N$ on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Un espace métrique est *complet* si toute suite de Cauchy converge.

Définition : Un espace métrique (X, d) est *totalelement borné* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie x_1, \dots, x_k de points de X tels que $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^k$ est un recouvrement de X .

1.3 Séparation, Hausdorff

Un espace métrique a des bonnes propriétés de *séparation* ; il est, par exemple, *Hausdorff* (ou T_2 ou *séparé*), à savoir, pour tous points $x \neq y$ il existe deux ouverts U, V (ou, de façon équivalente, deux voisinages) tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. Il existe d'autres notions de séparation que nous ne verrons que rapidement (en TD).

1.4 Topologies induites

On connaît plusieurs méthodes pour construire des nouveaux ensembles en partant d'ensembles donnés (e.g. ensemble produit, sous-ensemble, ensemble union disjointe, ensemble quotient, etc.). Si, à la place de considérer des ensembles, on considère des espaces topologiques, il faut être capables de définir des topologies sur les ensembles obtenus, topologies qui soient “naturelles” par rapport aux topologies des espaces initiaux. Cela revient souvent à imposer que certaines fonctions naturelles (e.g. les projections pour les produits, l'inclusion pour les sous-ensembles, etc.) soient continues de la “meilleure façon possible”. Voici des définitions précises.

Définition : Soient $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ une famille (non vide) d'espaces topologiques, E un ensemble et $\{f_i : E \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ des fonctions. On appelle *topologie initiale* (relative à $\{f_i : E \rightarrow X_i\}_{i \in I}$) la topologie sur E la moins fine qui rend toutes les f_i continues.

On peut montrer (exercice) que l'ensemble $\Sigma = \cup_{i \in I} \{f_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\}$ est une sous-base de la topologie initiale sur E . La topologie initiale satisfait une *propriété universelle* : si on considère E avec la topologie initiale, alors on aura que, pour tout espace topologique (X', τ') et fonction $g : X' \rightarrow E$, g est continue si et seulement si $f_i \circ g : X' \rightarrow X_i$ est continue pour tout $i \in I$.

Exemples :

- a La *topologie produit* sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ est la topologie initiale relative aux projections $\{p_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$.
- b La *topologie de sous-espace* sur $Y \subset X$ est la topologie initiale relative à l'inclusion canonique $Y \hookrightarrow X$. Remarquons aussi que si $Z \subset Y \subset X$, alors la topologie de Z comme sous-espace de Y est la même que celle de Z comme sous-espace de X .

Définition : Soient $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ une famille (non vide) d'espaces topologiques, E un ensemble et $\{f_i : X_i \rightarrow E\}_{i \in I}$ des fonctions. On appelle *topologie finale* (relative à $\{f_i : X_i \rightarrow E\}_{i \in I}$) la topologie sur E la plus fine qui rend toutes les f_i continues.

On peut montrer (exercice) que l'ensemble $\tau_f = \{A \subset E \mid f_i^{-1}(A) \in \tau_i \forall i \in I\}$ est bien la topologie finale sur E . La topologie finale aussi satisfait une *propriété universelle* : si on considère E avec la topologie finale, alors on aura que, pour tout espace topologique (X', τ') et fonction $g : M \rightarrow X'$, g est continue si et seulement si $g \circ f_i : X_i \rightarrow X'$ est continue pour tout $i \in I$.

Exemples :

- c La *topologie quotient* sur X/\sim , où \sim dénote une relation d'équivalence, est la topologie finale relative à la projection canonique $\{p : X \rightarrow X/\sim\}$.
- d La *topologie de la somme ou union disjointe* sur $X = \sqcup_{i \in I} X_i$ est la topologie finale relative aux inclusions canoniques $X_i \hookrightarrow X$.

1.5 Compacité

Il y a deux définitions de compacité d'un espace topologique qui coïncident lorsque l'espace est métrique. Lorsqu'on parle d'espace compact, on sous-entend, en général, que l'espace est Hausdorff (en cas contraire on préfère parler d'espace *quasi compact*).

Définition : (*Borel-Lebesgue*). Un espace topologique est dit *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. Un espace quasi-compact est dit *compact* si de plus il est Hausdorff.

On peut traduire la définition de quasi-compact en utilisant les fermés à la place des ouverts et l'on obtient : un espace topologique est quasi-compact si pour toute famille de fermés dont l'intersection est vide il existe une sous-famille finie encore d'intersection vide. Ceci est aussi équivalent à : toute famille de fermés telle que toute sous-famille finie a intersection non vide a elle-même intersection non vide (*propriété de l'intersection finie*).

Voici quelques propriétés des espaces (quasi-)compacts.

Soient X un espace topologique Hausdorff, et $Y \subset X$ compact. Y est alors fermé.

Un sous-espace fermé d'un (quasi-)compact est (quasi-)compact.

L'image continue d'un espace quasi-compact est quasi-compacte. Si, de plus, l'espace cible est Hausdorff, l'image est compacte et la fonction est *fermée* (i.e. elle transforme fermés en fermés). Dans les mêmes hypothèses on déduit que, si la fonction est injective, elle est un homéomorphisme sur son image.

(*Lemme de Tykhonov*) Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit d'espaces topologiques. X est (quasi-)compact si et seulement si tous les X_i le sont.

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. X est compact si et seulement s'il est fermé et borné. (*Théorème de Heine-Borel*).

Un sous-espace compact d'un espace métrique est borné. De cela découle le *Théorème de Weierstrass* : une fonction continue réelle définie sur un compact a un maximum et un minimum.

On va montrer le Lemme de Tykhonov pour un produit de deux espaces (ce qui implique le Lemme de Tykhonov pour un produit fini d'espaces).

Théorème : Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. $X_1 \times X_2$ est quasi-compact si et seulement si X_1 et X_2 le sont.

Pour la preuve on a besoin d'établir quelques résultats intermédiaires.

Remarque : Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques et $x \in X_1$. Les espaces $\{x\} \times X_2 \subset X_1 \times X_2$ et X_2 sont homéomorphes. On considère les applications suivantes : $\sigma : X_2 \longrightarrow \{x\} \times X_2$, définie par $y \mapsto (x, y)$, $j : \{x\} \times X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ l'inclusion naturelle, et $p_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$ la projection canonique. Il est immédiat de voir que les applications σ et $p_2 \circ j$ sont l'une l'inverse de

l'autre. L'application $p_2 \circ j$ est continue car composition d'applications continues (p_2 par définition de topologie produit et j par définition de topologie sous-espace). L'application $\text{Id}_{X_2} = p_2 \circ j \circ \sigma$ est continue. La propriété universelle de la topologie produit montre alors que $j \circ \sigma$ doit être continue. De même, la propriété universelle de la topologie sous-espace montre que σ est continue.

Lemme I : *Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. Si X_2 est quasi-compact alors la projection $p_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ est fermé (i.e. les images des fermés sont fermées).*

Preuve :

Soit C un fermé de $X_1 \times X_2$. On doit montrer que $p_1(C)$ est fermé. Pour cela on va montrer que $X_1 \setminus p_1(C)$ est ouvert. Si $X_1 \setminus p_1(C) = \emptyset$ on a fini. Sinon soit $x \in X_1 \setminus p_1(C)$ on doit montrer qu'il y a un voisinage (ouvert) de x disjoint de $p_1(C)$. On considère $p_1^{-1}(x) = \{x\} \times X_2$. On a clairement $p_1^{-1}(x) \cap C = \emptyset$. Soit $(x, y) \in p_1^{-1}(x)$. Puisque $(x, y) \in X_1 \times X_2 \setminus C$ et que $X_1 \times X_2 \setminus C$ est ouvert, on peut trouver deux ouverts $U_y \in \mathcal{U}_x$ et $V_y \in \mathcal{U}_y$ tels que $U_y \times V_y \in \mathcal{U}_{(x,y)}$ soit disjoint de C . La famille $\{U_y \times V_y\}_{y \in X_2}$ est un recouvrement ouvert de $p_1^{-1}(x) = \{x\} \times X_2$ qui, d'après la remarque, est quasi-compact. On peut en extraire un sous-recouvrement fini : $p_1^{-1}(x) \subset \cup_{i=1}^s U_{y_i} \times V_{y_i}$. L'ensemble $U = \cap_{i=1}^s U_{y_i}$ est un voisinage ouvert de x . Il est facile de voir que $p_1^{-1}(U) = U \times X_2 \subset \cup_{i=1}^s U_{y_i} \times V_{y_i}$ est disjoint de C et on a $U \cap p_1(C) = \emptyset$. On a donc construit un voisinage U de x disjoint de C .

Lemme II : *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Supposons que f est fermée et que pour tout $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ est quasi-compact. L'application f est alors propre (i.e. l'image réciproque de tout quasi-compact est quasi-compacte).*

Preuve :

Soit $K \subset Y$ un quasi-compact et soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f^{-1}(K)$. On sait que $f^{-1}(y)$ est compact pour tout $y \in Y$. Soit alors $y \in K \subset Y$. La famille $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de $f^{-1}(y)$ et on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U_1^y, \dots, U_{k_y}^y$. On pose $U(y) = \cup_{i=1}^{k_y} U_i^y$: il s'agit d'un ouvert de X . On a alors, par hypothèse, que $f(X \setminus U(y))$ est un fermé et donc $V_y = Y \setminus f(X \setminus U(y))$ est un ouvert qui contient y . La famille $\{V_y\}_{y \in K}$ est un recouvrement ouvert de K , qui est quasi-compact. On peut choisir un sous-recouvrement fini V_{y_1}, \dots, V_{y_s} et l'on aura $f^{-1}(K) \subset \cup_{j=1}^s f^{-1}(V_{y_j}) \subset \cup_{j=1}^s \cup_{i=1}^{k_{y_j}} U_i^{y_j}$. On a donc construit un sous-recouvrement fini de $\{U_i\}_{i \in I}$.

Preuve du théorème :

Si $X_1 \times X_2$ est quasi compact alors $X_1 = p_1(X_1 \times X_2)$ et $X_2 = p_2(X_1 \times X_2)$ doivent aussi l'être. Réciproquement, supposons que X_1 et X_2 sont compacts. Alors, d'après le lemme I et la remarque, p_1 satisfait les hypothèses du lemme II et est donc propre. L'image réciproque $X_1 \times X_2$ du quasi-compact X_1 doit alors être quasi compacte et le théorème est démontré.

Pour des sous-espaces d'espaces topologiques on utilise parfois la notion de (quasi-)compacité relative : un sous-espace est *relativement (quasi-)compact* si son adhérence est (quasi-)compacte.

Définition : (*Bolzano-Weierstrass*). Un espace topologique est dit *séquentiellement compact* si toute suite de points admet une sous-suite convergente.

Théorème : Soit (X, d) un espace métrique. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. X est compact.
2. X est séquentiellement compact.
3. X est (a) complet et (b) totalement borné.

Preuve:

1. \implies 3a.

On considère une suite de Cauchy $\{x_n\}$. On doit montrer qu'elle converge. Soit F_n l'adhérence de $\{x_m\}_{m \geq n}$. Pour tout n , F_n est un fermé. Il suffit alors de montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ n'est pas vide (car une suite de Cauchy a au plus une limite et tout point dans l'intersection est d'accumulation). Cela découle de la propriété des intersections finies.

1. \implies 2.

Il faut montrer que toute suite $\{x_n\}$ admet une sous-suite convergente. Pour cela il suffit de trouver une sous-suite de Cauchy et utiliser le point précédent. On considère le recouvrement ouvert $\{B(x, 1/2) \mid x \in X\}$. Par hypothèse il admet un recouvrement fini $B(x_1, 1/2), \dots, B(x_k, 1/2)$. Le principe des tiroirs nous assure qu'au moins une de ces boules contient une infinité de points de la suite. Soit z_1 le centre d'une boule qui contient une infinité d'éléments de $\{x_n\}$ et soit $\{x_n^{(1)}\}$ une sous-suite de $\{x_n\}$ contenue dans $B(z_1, 1/2)$. Soit D l'adhérence de $B(z_1, 1/2)$. C'est un fermé dans un espace compact, D est donc compact. On recommence la procédure avec D à la place de X , la sous-suite $\{x_n^{(1)}\} \subset D$ à la place de la suite $\{x_n\}$ et des boules de rayon $1/3$. On construit alors une suite de sous-suites $\{x_n^{(1)}\} \supset \{x_n^{(2)}\} \supset \dots$ et on pose $\{y_n\}$ la suite définie par $y_n = x_n^{(n)}$ pour tout $n \geq 1$. On peut voir facilement que cette suite est une sous-suite de $\{x_n\}$ et qu'elle est de Cauchy.

2. \implies 3b.

On considère la famille $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid \forall x \neq y \in A \ d(x, y) \geq \varepsilon\}$. \mathcal{F} n'est pas vide car tous les singletons y appartiennent et l'inclusion ensembliste induit sur \mathcal{F} un ordre partiel. Avec cet ordre \mathcal{F} est une famille inductive. On prend M_ε un élément maximal de la famille. M_ε ne peut pas être de cardinal infini car sinon on pourrait en extraire une suite sans points d'accumulation. M_ε est donc l'ensemble fini de points qui assure que X est totalement borné.

Remarque : De cette partie de la preuve découle aussi que X admet un sous-ensemble dense dénombrable, par exemple $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{2^{-n}}$. Dans ce cas on dit

que X est *séparable*. En particulier la topologie admet une base dénombrable (on dit alors que X *satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité*). En effet il suffit de prendre des boules de rayon rationnel centrées dans les points de M .

L'*axiome de Lindelöf*, à savoir tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement dénombrable, est aussi vérifié.

2. \implies 1.

On choisit \mathcal{B} une base dénombrable pour la topologie dont on a vu l'existence dans la remarque. Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert. On doit montrer qu'il admet un sous-recouvrement fini. L'ensemble $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists U \in \mathcal{U} : B \subset U\}$ est un recouvrement ouvert (par définition de base) et dénombrable (car \mathcal{B} l'est). Pour tout $A \in \mathcal{B}'$ on choisit $U_A \in \mathcal{U}$ tel que $A \subset U_A$. L'ensemble $\mathcal{U}' = \{U_A \mid A \in \mathcal{B}'\}$ est un sous-recouvrement dénombrable de \mathcal{U} . En particulier on peut ordonner les éléments de $\mathcal{U}' = \{U_n\}_{n \geq 1}$. Pour tout $n \geq 1$, $F_n = X \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k$ est un fermé et $F_n \supset F_{n+1}$. Si cette chaîne se stabilise (nécessairement sur l'ensemble vide), on peut extraire de \mathcal{U}' un sous-recouvrement fini et on a terminé. Sinon on peut construire une suite en choisissant $x_n \in F_n$. Quitte à prendre une sous-suite, x_n converge à x_0 . Puisque x_0 est un point d'accumulation pour la suite $\{x_n\}_{n \geq k} \subset F_k$ pour tout k et puisque F_k est fermé, on doit avoir $x_0 \in \bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$ ce qui est impossible.

3. \implies 2.

Toute suite dans X est totalement bornée car X l'est. On peut alors en extraire une sous-suite de Cauchy en suivant le même type de procédé utilisé dans la deuxième partie de la preuve. X étant complet, la sous-suite de Cauchy converge et X est séquentiellement compact.

1.6 Connexité, connexité par arcs

Soit X un espace topologique. On dit que X est *connexe* si pour toute paire d'ouverts non vides U_1, U_2 tels que $X = U_1 \cup U_2$ on a $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Cette propriété peut être aussi énoncée de façon duale en utilisant des fermés à la place des ouverts : pour toute paire de fermés F_1, F_2 tels que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ on a $F_1 \cup F_2 \neq X$.

Une notion plus forte est celle de *connexité par arcs* : X est *connexe par arcs* si pour toute paire de points $x, y \in X$ il existe un *chemin* entre x et y , à savoir, il existe une application continue $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$. On peut montrer qu'un espace connexe par arcs est connexe mais que la réciproque n'est pas vraie en général (voir les exercices). On peut montrer facilement que l'image continue d'un espace connexe (respectivement connexe par arcs) a encore la même propriété.

Il existe des notions locales de connexité (par arcs) qui, en général, ne sont pas préservées par les applications continues : un espace X est *localement connexe* (respectivement *localement connexe par arcs*) si tout point admet un système

fondamental de voisinages dont tout élément est connexe (respectivement connexe par arcs).

A priori il n'y a aucun lien entre les concepts globaux et les locaux : il y a des espaces connexes (ou connexes par arcs) qui ne le sont pas localement, ainsi que des espaces localement connexes (par arcs) qui ne le sont pas globalement (ceci est, peut-être, moins surprenant). En revanche, un espace connexe et localement connexe par arcs (c'est la cas, notamment, pour \mathbb{R}^n) est aussi connexe par arcs.

Si x est un point de X on peut montrer qu'il existe un unique sous-espace de X connexe (respectivement connexe par arcs) qui contient x . On appelle cela la *composante connexe* (respectivement *la composante par arcs*) de X contenant x . On note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes par arcs de X .

2. Topologie algébrique

Ce chapitre comporte plusieurs parties, touchant à des sujets assez hétérogènes entre eux (topologie, théorie des groupes, actions de groupes, complexes, variétés topologiques, classifications des surfaces, etc). Il s'agit de la partie vraiment nouvelle du cours qui vous donnera aussi les bases pour suivre le cours de topologie algébrique au deuxième semestre.

2.1 Homotopie

2.1.1 Définitions :

(a) Soient X et Y deux espaces topologiques et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f_0 et f_1 sont *homotopes*, et on écrit $f_0 \simeq f_1$, s'il existe une application continue $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ telle que $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. On appelle F une *homotopie* entre f_0 et f_1 .

(b) Une application continue est *nul-homotope* ou *homotopiquement triviale* si elle est homotope à une application constante.

(c) Une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Dans ce cas on dit que X et Y *ont le même type d'homotopie*. Remarquons qu'en particulier, deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

(d) Un espace X est *contractile* si Id_X est homotope à une constante.

(e) Soient $s : X \longrightarrow Y$ et $r : Y \longrightarrow X$ tels que $r \circ s = \text{Id}_X$. Dans ce cas on dira que r est une *rétraction* et s une *section* et que X est un rétracte de Y . À noter que s est nécessairement injective alors que r est nécessairement surjective (pourquoi?). Si l'on a, de plus, $s \circ r \simeq \text{Id}_Y$ on dira que X est un *rétracte par déformation* de Y et X et Y ont le même type d'homotopie.

(f) Soient $A \subset X$, $B \subset Y$ et $f_0, f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ deux *applications continues de paires* (i.e. $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont continues et $f_i(A) \subset B$ pour $i = 0, 1$). On

dira que f_0 et f_1 sont homotopes relativement à A si elles sont homotopes via une homotopie F telle que $F(a, t) = F(a, 0)$ pour tout $a \in A$ et $t \in [0, 1]$.

(g) Un rétracte de déformation est dit *fort* si l'homotopie qui intervient dans sa définition est relative à $s(X)$.

On aura souvent besoin du résultat suivant :

2.1.2 Lemme (de recollement) : *Soit X un espace topologique et X_1, \dots, X_n des fermés qui recouvrent X . Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit $f_i : X_i \rightarrow Y$ une application continue. Supposons que $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$ pour tout choix de i, j entre 1 et n . Il existe une unique application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que $f|_{X_i} = f_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

La preuve (d'une généralisation) de ce résultat est laissée en exercice.

2.1.3 Propriétés, exemples, remarques

- (a) La relation "être homotopes" est d'équivalence. En effet elle est réflexive ($f \simeq f$ via l'homotopie $F(x, t) = f(x)$ pour tous t et x), symétrique (si $f_0 \simeq f_1$ via l'homotopie F alors $f_1 \simeq f_0$ via l'homotopie F' définie par $F'(x, t) = F(x, 1-t)$; F' continue car composition d'applications continues) et transitive (si $f_0 \simeq f_1$ via une homotopie F et $f_1 \simeq f_2$ via une homotopie G , alors $f_0 \simeq f_2$ via l'homotopie H définie par $H(x, t) = F(x, 2t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$ et $H(x, t) = G(x, 1-2t)$ si $1/2 \leq t \leq 1$; H continue par 2.1.2). La même preuve montre que la relation "être homotopes relativement à un sous-ensemble" est aussi d'équivalence. La relation "avoir le même type d'homotopie" est aussi d'équivalence : réflexive : il suffit de prendre $f = g = \text{Id}_X$; symétrique : dans la définition on voit bien que si f est une équivalence d'homotopie alors g l'est aussi ; transitive : on a $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$, puis $f' : Y \rightarrow Z$ et $g' : Z \rightarrow Y$ telles que $g' \circ f' \simeq \text{Id}_Y$ et $f' \circ g' \simeq \text{Id}_Z$. On a alors $(g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \simeq g \circ \text{Id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $(f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq f' \circ \text{Id}_Y \circ g' = f' \circ g' \simeq \text{Id}_Z$. Ici on a utilisé le fait que si $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sont des applications homotopes via une homotopie F et si $g : Z \rightarrow X$ et $h : Y \rightarrow W$ sont des applications continues, on a $h \circ f_0 \simeq h \circ f_1$ via l'homotopie $h \circ F$ et $f_0 \circ g \simeq f_1 \circ g$ via l'homotopie $F \circ (g \times \text{Id}_{[0,1]})$.
- (b) L'espace \mathbb{R}^n est contractile. En effet, soient 0 un point et $j : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'injection naturelle. Soit $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ l'application constante. On a, bien sûr, $c \circ j = \text{Id}_{\{0\}}$. Par ailleurs, l'application $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(x, t) = tx$ est une homotopie entre $j \circ c$ et $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$. En particulier j est une section, c une rétraction et $\{0\}$ un rétracte par déformation (fort) de \mathbb{R}^n qui ont donc le même type d'homotopie.
- (c) Les implications suivantes sont faciles à vérifier (exercice) un espace convexe est étoilé, un espace étoilé est contractile et un espace contractile est connexe par arcs.

- (d) En utilisant la dernière remarque de la partie (a) il est immédiat de voir que $f : X \longrightarrow Y$ est homotopiquement triviale si X ou Y est contractile.
- (e) Deux applications constantes $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont homotopes si et seulement si leurs images se trouvent dans la même composante par arcs. Soient $f_0(X) = y_0$ et $f_1(X) = y_1$. Il est facile de voir qu'on a une homotopie entre f_0 et f_1 si et seulement si on a un chemin entre y_0 et y_1 .
- (f) Un espace est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie d'un point. Si $f : X \longrightarrow \{*\}$, $g : \{*\} \longrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie alors $g \circ f$ est constante et $\simeq \text{Id}_X$. Réciproquement si $\text{Id}_X \simeq c$, où c est une application constante avec image x_0 , on voit que $\{x_0\} \hookrightarrow X$ et c donnent une équivalence d'homotopie. Il en suit que toutes les applications de X dans X sont homotopes si X est contractile.
- (g) On verra dans la partie dédiée aux revêtements que l'image continue d'un espace contractile ne l'est pas en général.
- (h) Tout espace X se plonge (comme sous-espace) dans un espace contractile. Il suffit de considérer le cône de base $X : \mathcal{C}(X) = X \times [0, 1] / \sim$, où la relation \sim est définie par $(x, s) \sim (y, s')$ si et seulement si $s = s' = 0$ (et pour tous $x, y \in X$). L'application $F : \mathcal{C}(X) \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}$ définie par $F([x, s], t) = [x, st]$ est une homotopie entre $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ et l'application constante à valeurs dans le sommet du cône.
- (i) Il existe une notion plus forte que celle d'homotopie. On dit que $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont *isotopes* s'il existe une homotopie F entre $F(., 0) = \text{Id}_X$ et $F(., 1) = g$ telle que $F(., t)$ est un homéomorphisme pour tout t et $f_0 \circ g = f_1$. Dans ce cas F s'appelle *isotopie*.

2.2 Produit de chemins et définition du groupe fondamental

2.2.1 Définitions :

(i) Soient $\alpha, \beta : [0, 1] \longrightarrow X$ deux chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. On peut alors définir un *chemin produit* $\alpha * \beta : [0, 1] \longrightarrow X$ de la façon suivante : $\alpha * \beta(s) = \alpha(2s)$ si $0 \leq s \leq 1/2$ et $\beta(2s - 1)$ si $1/2 \leq s \leq 1$. Cette application est continue d'après le lemme de recollement.

(ii) Le *chemin inverse* de α , noté α^{-1} , est défini par $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$.

2.2.2 Remarque et notation : Tout chemin α est homotopiquement trivial. En effet, l'application $F(s, t) = \alpha(s(1 - t))$ est une homotopie entre α et le chemin constant en $\alpha(0)$. Par la suite on notera η_x le chemin constant en x , à savoir le chemin tel que $\eta_x(s) = x$ pour tout $s \in [0, 1]$. Ceci signifie que deux chemins sont homotopes si et seulement si leurs images sont contenues dans la même composante par arcs. On voit donc que la relation "être homotope" n'est pas très intéressante pour les chemins. Il convient alors de considérer pour les chemins des *homotopies de chemins*, i.e. des homotopies relatives à $\{0, 1\}$.

2.2.3 Propriétés :

Les produits $\alpha * \alpha^{-1}$ et $\alpha^{-1} * \alpha$ sont homotopes aux chemins constants $\eta_{\alpha(0)}$ et $\eta_{\alpha(1)}$ respectivement. Pour la première affirmation l'homotopie à considérer est $F(s, t) = \alpha(2s)$ si $0 \leq s \leq (1-t)/2$, $= \alpha(1-t) = \alpha^{-1}(t)$ si $(1-t)/2 \leq s \leq (1+t)/2$, et $= \alpha^{-1}(2s-1)$ si $(1+t)/2 \leq s \leq 1$. On a, ensuite, $\alpha^{-1} * \alpha = \alpha^{-1} * (\alpha^{-1})^{-1} \simeq \eta_{\alpha^{-1}(0)} = \eta_{\alpha(1)}$.

Le produit $*$, lorsqu'il est défini, est associatif à homotopie près, i.e. $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \simeq \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$. Le chemin de gauche est défini par $\alpha_1(4s)$ si $0 \leq s \leq 1/4$, $\alpha_2(4s-1)$ si $1/4 \leq s \leq 1/2$, et $\alpha_3(2s-1)$ si $1/2 \leq s \leq 1$. Le chemin de droite est défini par $\alpha_1(2s)$ si $0 \leq s \leq 1/2$, $\alpha_2(4s-2)$ si $1/2 \leq s \leq 3/4$, et $\alpha_3(4s-3)$ si $3/4 \leq s \leq 1$. Une homotopie entre les deux chemins est donnée par $F(s, t) = \alpha_1(4s/(1+t))$ si $0 \leq s \leq (1+t)/4$, $= \alpha_2(4s-t-1)$ si $(1+t)/4 \leq s \leq (2+t)/4$, et $= \alpha_3((4s-2-t)/(2-t))$ si $(2+t)/4 \leq s \leq 1$.

Le chemin constant η_{x_0} (respectivement η_{x_1}) est l'élément neutre à gauche (respectivement à droite) de $*$, à homotopie près, pour tous les chemins émanant de x_0 (respectivement aboutissants à x_1). Si α est un chemin tel que $\alpha(0) = x_0$ le chemin $\eta_{x_0} * \alpha$ défini par $\eta_{x_0}(2s) = x_0$ si $0 \leq s \leq 1/2$, et $\alpha(2s-1)$ si $1/2 \leq s \leq 1$ est homotope au chemin α via l'homotopie $F(s, t) = \eta_{x_0}(2s) = x_0$ si $0 \leq s \leq (1-t)/2$, et $= \alpha((2s+t-1)/(1+t))$ si $(1-t)/2 \leq s \leq 1$. De même pour $\alpha * \eta_{x_1}$, défini comme $\alpha(2s)$ si $0 \leq s \leq 1/2$, et $\eta_{x_1}(2s-1) = x_1$ si $1/2 \leq s \leq 1$ est homotope au chemin α via l'homotopie $F(s, t) = \alpha(2s/(1+t))$ si $0 \leq s \leq (1+t)/2$, et $= \eta_{x_1}(2s-1) = x_1$ si $(1+t)/2 \leq s \leq 1$.

Soient α et α' deux chemins homotopes via F et soient β, γ deux chemins tels que $\beta(1) = \alpha(0) = \alpha'(0)$ et $\gamma(0) = \alpha(1) = \alpha'(1)$. Alors $\beta * \alpha \simeq \beta\alpha'$ et $\alpha * \gamma \simeq \alpha'\gamma$. Les homotopies cherchées sont $G(s, t) = \beta(2s)$ si $0 \leq s \leq 1/2$, et $= F(2s-1, t)$ si $1/2 \leq s \leq 1$; $H(s, t) = F(2s, t)$ si $0 \leq s \leq 1/2$, et $= \gamma(2s-1)$ si $1/2 \leq s \leq 1$.

2.2.4 Définition et remarque : Soit $x_0 \in X$. On appelle *lacet basé en x_0* un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Le produit $*$ est alors toujours bien défini sur l'ensemble L_{x_0} des lacets basés en x_0 .

Dans la suite on supposera toujours X **connexe par arcs**.

2.2.5 Proposition, définition et remarque : On pose $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'homotopie des lacets de L_{x_0} . *Le produit $*$ descend à $\pi_1(X, x_0)$ qui a donc structure de groupe et s'appelle groupe fondamental de X basé en x_0 .*

Notons que puisque les lacets sont basés en x_0 , $\pi_1(X, x_0)$ ne "voit" que la composante par arcs de x_0 . À cause de cela on considère X connexe par arcs.

Preuve:

D'après 2.2.3, il suffit de montrer que $*$ est bien défini, c'est-à-dire $[\gamma_1 * \gamma_2] = [\gamma_1] * [\gamma_2]$. Soient $\gamma_i \simeq \gamma'_i$ via une homotopie F_i , pour $i = 1, 2$. On doit montrer

alors que $\gamma_1 * \gamma_2 \simeq \gamma'_1 * \gamma'_2$. Pour cela il suffit de considérer l'homotopie $F(s, t)$ définie par $F_1(2s, t)$ si $0 \leq s \leq 1/2$ et par $F_2(2s - 1, t)$ si $1/2 \leq s \leq 1$. Notons que si $s = 1/2$ on a $F_1(1, t) = x_0 = F_2(0, t)$ car les F_i sont des homotopies de chemins. Le lemme de recollement permet alors de conclure.

2.2.6 Remarque : Soit X connexe par arcs et $x_0, x_1 \in X$. On a $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. En effet soit α un chemin entre $x_0 = \alpha(0)$ et $x_1 = \alpha(1)$. Pour tout lacet γ basé en x_0 le chemin $\alpha^{-1} * \gamma * \alpha$ est un lacet basé en x_1 . Si $\gamma \simeq \gamma'$, alors, comme on l'a vu en 2.2.3, on a $\alpha^{-1} * \gamma * \alpha \simeq \alpha^{-1} * \gamma' * \alpha$. Le chemin α induit alors une application $\varphi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$ qui, de plus, est un morphisme de groupes : $\varphi_\alpha([\gamma_1 * \gamma_2]) = [\alpha^{-1} * (\gamma_1 * \gamma_2) * \alpha] = [\alpha^{-1} * \gamma_1 * (\alpha * \alpha^{-1}) * \gamma_2 * \alpha] = [\alpha^{-1} * \gamma_1 * \alpha] * [\alpha^{-1} * \gamma_2 * \alpha] = \varphi_\alpha([\gamma_1]) * \varphi_\alpha([\gamma_2])$, car $\alpha * \alpha^{-1} \simeq \eta_{\alpha(0)} = x_0$. Cet homomorphisme est trivialement un isomorphisme avec $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{\alpha^{-1}}$. Cependant ce n'est pas un *isomorphisme canonique* : si β est un autre chemin entre x_0 et x_1 , l'isomorphisme $\varphi_{\beta^{-1}} \circ \varphi_\alpha = \varphi_{\beta^{-1} * \alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ est la conjugaison par le classe du lacet $\beta^{-1} * \alpha$. On pourra donc écrire $\pi_1(X)$ sans mentionner le point base en tenant compte que ce est défini à isomorphisme près.

2.2.7 Propriétés fonctorielles : Soient X et Y deux espaces connexes par arcs, $x_0 \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. f induit un morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$, défini par $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. En effet, il est immédiat de voir que $f \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)$. De plus, si $g : Y \longrightarrow Z$ on aura $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

2.2.8 Proposition : Si $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont homotopes via une homotopie F , il existe un isomorphisme $\varphi : \pi_1(Y, f_0(x_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, f_1(x_0))$ tel que $\varphi \circ f_{0*} = f_{1*}$; de plus $\varphi = \varphi_\alpha$ où $\alpha(s) = F(x_0, s)$.

Preuve :

Il suffit de montrer que $\varphi \circ f_{0*}([\gamma]) = f_{1*}([\gamma])$ pour tous $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, ce qui équivaut à $\alpha^{-1} * (f_0 \circ \gamma) * \alpha \simeq f_1 \circ \gamma$. Pour cela il faut exhiber une homotopie (de chemins) entre les deux lacets. L'homotopie cherchée est $G(s, t) = \alpha^{-1}(3s)$ si $0 \leq s \leq (1-t)/3$, $= F(\gamma((3s+t-1)/(1+2t)), t)$ si $(1-t)/3 \leq s \leq (2+t)/3$, et $= \alpha(3s-2)$ si $(2+t)/3 \leq s \leq 1$. On voit que $G(s, 0) = \alpha^{-1}(0) = \alpha(1) = F(x_0, 1) = f_1(x_0)$ et $G(s, 1) = \alpha(1) = F(x_0, 1) = f_1(x_0)$.

2.2.9 Corollaire : Si X et Y ont le même type d'homotopie et X est connexe par arcs, alors Y est aussi connexe par arcs et de plus $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Preuve :

L'hypothèse du corollaire se traduit par l'existence de deux applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Pour la première affirmation il suffit de prendre deux points quelconques y, y' dans Y et considérer leurs images $x = g(y)$ et $x' = g(y')$. X étant connexe par arcs, il existe bien un chemin α entre x et x' . Soit $\beta = f \circ \alpha$ le chemin composé qui va de $z = f(g(y))$ à

$z' = f(g(y'))$. On considère G l'homotopie entre $f \circ g$ et Id_Y : l'application $G(y, \cdot)$ est un chemin α_1 entre z et y , alors que l'application $G(y', \cdot)$ est un chemin α_2 entre z' et y . Le chemin $\alpha_1^{-1} * \beta * \alpha_2$ est donc un chemin entre y et y' . Pour la deuxième affirmation, on utilise la proposition 2.2.8 et les propriétés fonctorielles pour obtenir $\varphi \circ \text{Id}_{X_*} = (g \circ f)_*$, puis $\varphi \circ \text{Id}_{\pi_1(X)} = \varphi = g_* \circ f_*$ et, de façon analogue, $\varphi' = f_* \circ g_*$, où φ et φ' sont des isomorphismes. Il en suit que f_* et g_* sont injectives et surjectives : QED.

2.2.10 Exemples :

- (a) Si X est contractile on a $\pi_1(X) = 1$. En effet, d'après 2.2.10 X a le même groupe fondamental d'un singleton, mais le seul lacet dans un espace à un élément est le lacet constant. On a donc $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\mathbf{B}^n) = 1$.
- (b) Dans un exercice on montre que $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \pi_1(\mathbf{S}^1) \cong \pi_1(M)$, où M dénote le ruban de Möbius. On verra dans la partie sur les revêtements que ces groupes sont isomorphes à \mathbb{Z} . Dans le cas du cercle, on peut interpréter le générateur 1 de \mathbb{Z} comme la classe du lacet qui fait une fois le tour du cercle dans le sens positif.

2.2.11 Propriété : Si X et Y sont deux espaces connexes par chemins on a $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$. On note p_X (respectivement p_Y) la projection de $X \times Y$ sur X (respectivement Y). Si γ est un lacet de $X \times Y$ basé en (x_0, y_0) alors $p_X \circ \gamma$ (respectivement $p_Y \circ \gamma$) est un lacet de X (respectivement Y) basé en x_0 (respectivement en y_0). Réciproquement si γ_X et γ_Y sont des lacets de X et Y basés en x_0 et y_0 respectivement (γ_X, γ_Y) est un lacet de $X \times Y$ basé en (x_0, y_0) . Le même discours s'applique aux homotopies.

2.2.12 Exemples :

- (a) Le groupe fondamental du cylindre est \mathbb{Z} : $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathbf{S}^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}) \times \pi_1(\mathbf{S}^1) \cong 1 \times \mathbb{Z}$.
- (b) Le groupe fondamental du tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ est \mathbb{Z}^2 .

2.2.13 Définition et remarque : Un espace X connexe par arcs est *simplement connexe* si $\pi_1(X) = 1$. En particulier tout espace contractile est simplement connexe, mais la réciproque n'est pas vraie : on verra que $\pi_1(\mathbf{S}^n) = 1$ si $n \geq 2$, cependant aucune sphère n'est contractile. Vous verrez la preuve de cette affirmation, qui utilise l'homologie, au deuxième semestre dans le cours de topologie algébrique.

En TD on verra d'autres applications des notions développées dans ce chapitre, notamment la preuve du théorème du point fixe de Brouwer et du théorème fondamentale de l'algèbre. Plus tard on verra aussi le théorème Borsuk-Ulam.

2.3 Groupe libre et présentations de groupes

On admettra la plupart des résultats de ce chapitre qui nous seront utiles dans la suite.

Soient \mathcal{A} et $\bar{\mathcal{A}}$ deux ensembles non vides en bijection ($a \mapsto \bar{a}$ étant la bijection). On considère $M(\mathcal{A})$ l'ensemble de toutes les suites $s_1 \dots s_k$ finies (y compris la suite vide) d'éléments s_i de $\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}}$, i.e. *le mots d'alphabet* $\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}}$. On considère sur $M(\mathcal{A})$ le produit qui consiste à “mettre un mot après l'autre”. Sur $M(\mathcal{A})$ on considère ensuite la relation $w_1 \sim w_2$ s'il existe $u, v \in M(\mathcal{A})$ et $a \in \mathcal{A}$ tels que $w_1 = uv$ et $w_2 \in \{ua\bar{a}v, u\bar{a}av\}$. On note $F(\mathcal{A})$ l'ensemble des classes de la relation d'équivalence engendrée par \sim . $F(\mathcal{A})$ est un groupe avec produit induit par celui de $M(\mathcal{A})$, élément neutre la classe de la suite vide et inverse de la classe de $s_1 \dots s_k$ la classe de $\bar{s}_k \dots \bar{s}_1$, où \bar{s}_i dénote l'image de s_i par la bijection $a \mapsto \bar{a}$ si $s_i \in \mathcal{A}$ et l'image inverse de s_i si $s_i \in \bar{\mathcal{A}}$.

2.3.1 Définition : On dira que $F(\mathcal{A})$ est le *groupe libre sur* \mathcal{A} . Si \mathcal{A} est fini de cardinal n on dira que $F(\mathcal{A})$ est le *groupe libre avec n générateurs* ou *de rang n* .

2.3.2 Remarques et propriétés :

- (a) Si \mathcal{A} et \mathcal{A}' ont le même cardinal, alors $F(\mathcal{A}) \cong F(\mathcal{A}')$. La réciproque est aussi vraie. Pour le voir il suffit d'abélianiser les deux groupes : les cardinaux des \mathcal{A} seront alors les rangs des groupes abélianisés. En cas de rang fini égal à n on pourra alors écrire F_n à la place de $F(\mathcal{A})$. Il est immédiat de voir que $F_1 \cong \mathbb{Z}$.
- (b) Soient G un groupe, \mathcal{A} un ensemble et $\phi : \mathcal{A} \rightarrow G$ une application ensembliste. Il existe un unique homomorphisme de groupes $\Phi : F(\mathcal{A}) \rightarrow G$ tel que $\Phi(a) = \phi(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ (le a à gauche est la classe de la suite avec un seul élément qui est a).
- (c) Pour tout groupe G il existe un ensemble \mathcal{A} et une application $\phi : \mathcal{A} \rightarrow G$ telle que le morphisme $\Phi : F(\mathcal{A}) \rightarrow G$ décrit au point précédent soit surjectif : il suffit de prendre comme \mathcal{A} un système de générateurs de G (e.g. G tout entier) et comme ϕ l'inclusion naturelle.

2.3.3 Définitions, notations et exemples :

Une *présentation* pour un groupe G est la donnée d'un groupe libre $F(\mathcal{A})$ et d'un épimorphisme $\Phi : F(\mathcal{A}) \rightarrow G$. Par le premier théorème d'isomorphisme on a alors $G \cong F(\mathcal{A})/\ker(\Phi)$. On dira que G est *de type fini* si on peut choisir \mathcal{A} de cardinal fini. On dira que G est *de présentation finie* s'il est de type fini et de plus $\ker(\Phi)$ peut être engendré en tant que sous-groupe distingué par un nombre fini d'éléments. (Attention ! il se peut que $\ker(\Phi)$ ne soit pas de type fini).

Pour un groupe de type fini, pour lequel $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ on écrit $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid \{R_i\}_{i \in I} \rangle$ où les R_i sont des éléments de $F(\mathcal{A})$ qui engendrent normalement $\ker(\Phi)$, i.e. $\ker(\Phi)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G qui contient les R_i . On appelle les R_i *relateurs* et on appelle *relations* les identités $R_i = 1$ qui sont vérifiées dans G . Pour être précis, on devrait écrire $\Phi(R_i) = 1$, mais normalement on utilise la même notation pour les $a \in \mathcal{A}$ et leurs images par ϕ dans G . Cela signifie qu'on

identifie \mathcal{A} avec un système de générateurs pour G et on détermine quels sont les produits de ces générateurs qui donnent l'élément neutre.

À noter : un groupe admet beaucoup de présentations.

La présentation standard d'un groupe libre de rang n est $\langle a_1, \dots, a_n \mid \rangle$. En particulier $\mathbb{Z} = \langle a \mid \rangle$.

Voici quelques présentations pour le groupe trivial : $\langle \mid \rangle$, $\langle a \mid a \rangle$, $\langle a, b \mid a, ab \rangle$, $\langle a \mid a^2, a^3 \rangle \dots$

$\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a \mid a^n \rangle$. Si $n = mk$ avec m et k premiers entre-eux on a aussi la présentation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle b, c \mid c^m, b^k, [c, b] \rangle$ (lemme chinois).

$\mathbf{D}_n = \langle a, b \mid a^n, b^2, (ba)^2 \rangle = \langle c, b \mid c^2, b^2, (bc)^n \rangle$, où \mathbf{D}_n dénote le groupe diédral avec $2n$ éléments. (Ici, $a = bc$ et $c = ba$).

2.3.4 Théorème (de Tietze) : Soient $G = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$ et $G' = \langle \mathcal{A}' \mid \mathcal{R}' \rangle$ deux présentations de groupes, où \mathcal{R} et \mathcal{R}' dénotent les ensembles des relateurs. On a $G \cong G'$ si et seulement si on peut passer d'une présentation à l'autre via les deux transformations de Tietze suivantes :

I rajouter ou enlever des générateurs superflus : $\langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \mid \mathcal{R} \cup \{bw_b\}_{b \in \mathcal{B}} \rangle$, où les w_b sont des mots dans les éléments de \mathcal{A} ;

II rajouter ou enlever des relateurs redondants : $\langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \rangle$, où $\mathcal{S} \subset \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ et donc $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \rangle\rangle$.

En particulier, deux présentations pour un même groupe sont reliées par des transformations de Tietze.

2.3.5 Définition, propriétés et exemples : Soient G et G' deux groupes admettant les présentations $G = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$ et $G' = \langle \mathcal{A}' \mid \mathcal{R}' \rangle$. On note $G * G'$ le groupe dont la présentation est $G * G' = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \mid \mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \rangle$. Le groupe $G * G'$ s'appelle *produit libre de G et G'* . Le théorème de Tietze implique que $G * G'$ ne dépend que (des classes d'isomorphisme) de G et G' et non des présentations utilisés pour le définir.

Par exemple, le groupe libre de rang n est le produit libre de n copies de \mathbb{Z} : $F_n = F_{n-1} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.

Les inclusions naturelles de \mathcal{A} et \mathcal{A}' dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \subset F(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')$ induisent des monomorphismes j et j' de G et G' dans $G * G'$.

Le produit libre de deux groupes satisfait une *propriété universelle* : soient H un groupe et $f : G \rightarrow H$, $f' : G' \rightarrow H$ deux homomorphismes. Il existe un unique homomorphisme $\psi : G * G' \rightarrow H$ tel que $f = \psi \circ j$ et $f' = \psi \circ j'$.

2.3.6 Définition et propriété universelle : Avec la notation de 2.3.5, soit A un groupe et soient $k : A \rightarrow G$, $k' : A \rightarrow G'$ deux homomorphismes (souvent il s'agira de monomorphismes). On définit le groupe $G *_A G'$ via la présentation $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \mid \mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \cup \{j(k(a))j'(k'(a))^{-1}\}_{a \in A} \rangle$ et on l'appelle *somme de G et G' amalgamée le long de A* .

La somme amalgamée de deux groupes satisfait une *propriété universelle* : pour toute paire de homomorphismes $f : G \longrightarrow H$ et $f' : G' \longrightarrow H$ tels que $f \circ k = f' \circ k'$ il existe un unique morphisme $\phi : G *_A G' \longrightarrow H$ tel que $f = \psi \circ j$ et $f' = \psi \circ j'$.

2.4 Théorème de Seifert-Van Kampen

Le résultat topologique suivant est souvent utile. Sa preuve est laissée en exercice.

2.4.1 Lemme (du nombre de Lebesgue) : *Soit K un espace métrique compact et $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert. Il existe un nombre positif ϵ tel que pour tout point y de K il existe un $i_y \in I$ tel que la boule de centre y et rayon ϵ est contenue dans U_{i_y} .*

2.4.2 Théorème (de Seifert-Van Kampen) : *Soient X un espace topologique et $A, B, A \cap B$ des ouverts non vides de X , connexes par arcs, tels que $X = A \cup B$. Soit $x_0 \in A \cap B$. On a*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$$

où les homomorphismes k et k' de la définition de somme amalgamée sont ceux induits par les inclusions naturelles de $A \cap B$ dans A et B .

Preuve :

Soit γ un lacet de X basé en x_0 . On doit montrer qu'il peut s'écrire comme produit de lacets de A et B basés en x_0 . On considère l'ensemble $\{\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B)\}$: il s'agit d'un recouvrement ouvert de l'espace métrique compact $[0, 1]$. D'après le lemme du nombre de Lebesgue on peut choisir des points $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = 1$, tels que $s_i - s_{i-1} < \epsilon$, pour tout i , et donc $[s_{i-1}, s_i]$ est contenu soit dans $\gamma^{-1}(A)$ soit dans $\gamma^{-1}(B)$. Il en suit que pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe $U_i \in \{A, B\}$ tel que $\gamma([s_{i-1}, s_i]) \subset U_i$. On note $\gamma_i = \gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ et $x_i = \gamma(s_i)$, pour tout $1 \leq i \leq k$. Remarquons qu'on a $x_k = x_0$, et $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_k$. Pour tout $1 \leq i \leq k-1$ choisissons un chemin α_i dans $U_i \cap U_{i+1} \in \{A, B, A \cap B\}$ joignant x_0 à x_i . On posera ensuite $\alpha_0 = \eta_{x_0} = \alpha_k$. On peut écrire alors $\gamma = \alpha_0 * \gamma_1 * \alpha_1^{-1} * \alpha_1 * \dots * \alpha_{k-1} * \gamma_k * \alpha_k^{-1}$, où chaque $\alpha_{i-1} * \gamma_i * \alpha_i^{-1}$ est un lacet contenu dans $U_i \in \{A, B\}$. On a bien que γ s'écrit comme produit de lacets de A et B basés en x_0 .

Supposons que γ est un lacet contenu dans $U \in \{A, B\}$. Si γ est homotopiquement trivial dans U alors il l'est aussi dans X . Si γ est un lacet contenu dans $A \cap B$ alors il est un lacet de A et de B . Il a donc deux possibles écritures qu'il faut identifier. Ceci montre que les relateurs de $\pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$ sont bien des éléments triviaux de $\pi_1(X, x_0)$. Montrons l'inclusion inverse. Supposons que un lacet γ basé en x_0 est homotopiquement trivial dans X , et soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ une homotopie de lacets entre γ et η_{x_0} . Puisque $[0, 1] \times [0, 1]$ est un espace métrique compact, comme dans la première partie de la preuve, on peut choisir

des points $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ et $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_l = 1$ tels que les images par F des carreaux $Q_{ij} = \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid s_{i-1} \leq s \leq s_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$ sont contenues dans $U_{ij} \in \{A, B\}$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$. Pour tout choix de i et j soit α_{ij} un chemin de x_0 à $F(s_i, t_j)$ contenu dans $U_{ij} \cap U_{i+1j} \cap U_{ij+1} \cap U_{i+1j+1} \in \{A, B, A \cap B\}$. On choisira $\alpha_{ij} = \eta_{x_0}$ si $F(s_i, t_j) = x_0$. Soient $\gamma_{ij} = F(\cdot, t_j) : [s_{i-1}, s_i] \rightarrow X$ et $\beta_{i,j} = F(s_i, \cdot) : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow X$. On a alors que les lacets basés en x_0 $\alpha_{i-1j} * \beta_{i-1j}^{-1} * \gamma_{ij-1} * \alpha_{ij-1}^{-1}$ et $\alpha_{i-1j} * \gamma_{ij} * \beta_{ij}^{-1} * \alpha_{ij-1}^{-1}$ sont homotopes dans $U_{ij} \in \{A, B\}$. En conséquence, l'homotopie F peut être construite à partir d'homotopies de A et B et donc les relateurs de $\pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0)$ suffisent pour donner une présentation de $\pi_1(X, x_0)$.

2.4.3 Exemples et applications :

- (a) On a $\pi_1(\mathbf{S}^n) = 1$ si $n \geq 2$. Pour cela on considère deux boules ouvertes, centrées en les deux pôles et ayant comme intersection un $\mathbf{S}^{n-1} \times (0, 1)$ qui est un voisinage de l'équateur. Les boules étant contractiles, on en déduit aisément le résultat. À noter que si $n = 1$ l'intersection des deux boules n'est pas connexe par arcs !
- (b) Le groupe fondamental d'un *bouquet de deux cercles*, i.e. deux cercles collés le long d'un point, comme deux cercles tangents, est le groupe libre de rang 2. En général, le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est le groupe libre de rang n . Si on définit un *graphe* comme un espace qui est localement homéomorphe soit à un intervalle ouvert, soit à un cône sur un ensemble discret, il est facile de se convaincre que le groupe fondamental d'un graphe (compact et connexe par arcs) est un groupe libre. En effet, en rétractant un *arbre maximal* un graphe (compact et connexe par arcs) a le même type d'homotopie d'un bouquet de cercles.
- (c) Si on aura le temps, on verra plus en détail que toute surface (compacte, sans bord) peut-être obtenue par recollement des côtés d'un polygone particulier. Cela permet de calculer le groupe fondamental d'une surface orientable (non-orientable) en utilisant le théorème de Seifert-Van Kampen. On obtient

$$\Sigma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

pour la surface orientable de genre g (i.e. avec g trous) et

$$N_g = \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1^2 \dots a_g^2 \rangle$$

pour la surface non-orientable de genre g (i.e. la somme connexe de g plans projectifs). On peut aussi utiliser le fait que toute surface orientable (non-orientable) est somme connexe de tores (plans projectifs) pour obtenir cette présentation. On remarque, en abélianisant, que $\Sigma_g \not\cong \Sigma_r$, si $g \neq r$, $N_g \not\cong N_r$,

si $g \neq r$, et $\Sigma_g \not\cong N_r$ pour tout choix de g et r . En effet $\Sigma_g/\Sigma'_g \cong \mathbb{Z}^{2g}$, et $N_g/N'_g \cong \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On en déduit que ces surfaces sont deux à deux non homéomorphes.

2.5 Revêtements

2.5.1 Définitions : Un *revêtement* est une application continue $p : E \longrightarrow B$, où E s'appelle *espace totale* et B *base du revêtement*, telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert U_b de b avec la propriété que $p^{-1}(U_b)$ est une union disjointe d'ouverts V_i tels que $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow (U_b)$ est un homéomorphisme. U_b s'appelle *ouvert élémentaire*.

2.5.2 Remarques et exemples :

- (a) L'application p est surjective, de plus p est une fibration avec fibre $p^{-1}(b)$ discrète. L'application p est un homéomorphisme local et donc elle est ouverte.
- (b) L'application $\text{Id}_B : B \longrightarrow B$ est le revêtement trivial. Tout homéomorphisme est un revêtement.
- (c) L'application $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$, définie par $t \mapsto \exp(2\pi it)$ est un revêtement. En effet, tout arc (connexe) de \mathbf{S}^1 de longueur $< 2\pi$ se relève en \mathbb{Z} intervalles disjoints dans \mathbb{R} . Ce revêtement en induit un autre : $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbf{T}^n = (\mathbf{S}^1)^n$, où $q = (p, p, \dots, p)$.
- (d) L'application $p : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbf{S}^n/(x \sim -x)$ est un revêtement : la propriété de revêtement découle du fait que \mathbf{S}^n est Hausdorff. Si $x \in \mathbf{S}^n$ et Π_x est le plan vectoriel perpendiculaire à x alors $\mathbf{S}^n \setminus \Pi_x$ est union de deux ouverts V_i image réciproque de l'ouvert $p(\mathbf{S}^n \setminus \Pi_x)$ voisinage du point $[x]$.
- (e) Il y a des revêtements tels que B est connexe par arcs mais E ne l'est pas : $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ et $p(x, y) = (x, 0)$. On ne considérera que des revêtements avec espace total (et donc base) connexe.

2.5.3 Définition : Soient $p : E \longrightarrow B$ un revêtement et $f : X \longrightarrow B$ une application continue. Un *relevé* de f est une application continue $\tilde{f} : X \longrightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$.

2.5.4 Lemme (relèvement de chemins) : Soient $p : E \longrightarrow B$ un revêtement, $b_0 \in B$ et $e_0 \in E$ tel que $p(e_0) = b_0$. Soit α un chemin tel que $\alpha(0) = b_0$. Il existe un unique relevé $\tilde{\alpha}$ tel que $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. En particulier, si $\alpha = \eta_{b_0}$ alors $\tilde{\alpha} = \eta_{e_0}$.

Preuve :

Les ouverts élémentaires forment un recouvrement ouvert de B . D'après le lemme du nombre de Lebesgue, on peut choisir $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ tels que $\alpha([s_{i-1}, s_i])$ est contenu dans un ouvert élémentaire. Soient U l'ouvert élémentaire qui contient $\alpha([s_0, s_i])$ et $\{V_i\}$ les ouverts disjoints qui constituent son image réciproque. On a que $b_0 \in U$ par hypothèse, donc e_0 appartient à un et un seul (car il sont deux à deux disjoints) des V_i , disons V_{i_0} . Il y a alors une unique

façon de définir $\tilde{\alpha}$ sur $[s_0, s_i]$, notamment $p|^{-1} \circ \alpha|_{[s_0, s_i]}$, où $p|^{-1} : U \longrightarrow V_{i_0}$. De proche en proche (en remplaçant b_0 par $\alpha(s_i)$ et e_0 par $\tilde{\alpha}(s_i)$) on a une unique façon de construire un chemin $\tilde{\alpha}$ continu.

2.5.5 Lemme (relèvement d'une homotopie (de chemins)) : *Soient $p : E \longrightarrow B$ un revêtement, $b_0 \in B$ et $e_0 \in E$ tel que $p(e_0) = b_0$. Soit $F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow B$ une homotopie telle que $F(0, 0) = b_0$. Il existe une unique homotopie $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow E$ telle que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ et $p \circ \tilde{F} = F$. De plus, si F est une homotopie de chemins ainsi en est de \tilde{F} .*

Preuve :

La preuve est analogue à celle de 2.5.4, en découpant l'ensemble de définition de F en carreaux. Si F est une homotopie de chemins, i.e. si $F(0, t) = b_0 = \eta_{b_0}$ et $F(1, t) = b_1 = \eta_{b_1}$, on voit bien que $\tilde{F}(0, t)$ et $\tilde{F}(1, t)$ doivent être deux relevés de chemins constants. D'après 2.5.4 ils sont constants aussi.

2.5.6 Corollaire : *Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement tel que $p(e_0) = b_0$. L'homomorphisme induit $p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$ est injectif.*

Preuve :

Soit $[\gamma] \in \pi_1(E, e_0)$ tel que $p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma] = 1$ dans $\pi_1(B, b_0)$. Il existe alors une homotopie de chemins F entre $p \circ \gamma$ et η_{b_0} . Elle se relève en une homotopie de chemins entre $p \tilde{\circ} \gamma$ et $\tilde{\eta}_{b_0}$. À cause de l'unicité du relèvement on a $p \tilde{\circ} \gamma = \gamma$ et $\tilde{\eta}_{b_0} = \eta_{e_0}$, d'où on en déduit que $[\gamma] = 1$ et p_* est injective.

2.5.7 Proposition : *Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement et soient e_0 et e_1 tels que $p(e_i) = b_0$ pour $i = 0, 1$. Les sous-groupes $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et $p_*(\pi_1(E, e_1))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$. Réciproquement, si G est un sous-groupe de $\pi_1(B, b_0)$ conjugué à $p_*(\pi_1(E, e_0))$, il existe $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ tel que $G = p_*(\pi_1(E, e_1))$.*

Preuve :

Soit α un chemin entre e_0 et e_1 . Le chemin $p \circ \alpha$ est un lacet basé en b_0 . Il est facile de voir qu'on a $p_* \circ \varphi_\alpha = \varphi_{p \circ \alpha} \circ p_*$, où on a vu que $\varphi_{p \circ \alpha}$ est la conjugaison dans $\pi_1(B, b_0)$ par $[p \circ \alpha]$. La conclusion est immédiate. La réciproque est analogue, en partant d'un lacet de B basé en b_0 qui conjugue G et $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et en considérant son relevé dans E .

2.5.8 Définition : Soit $Sym(p^{-1}(b_0))$ le groupe des permutations des points de la fibre $p^{-1}(b_0)$. La *monodromie du revêtement* p est le morphisme de groupes $\rho : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow Sym(p^{-1}(b_0))$ défini par $\rho([\gamma]) = \sigma_\gamma$, où $\sigma_\gamma(e_i) = \tilde{\gamma}_{e_i}(1)$ et $\tilde{\gamma}_{e_i}$ dénote le relevé de γ tel que $\tilde{\gamma}_{e_i}(0) = e_i$. D'après 2.5.5, cette définition ne dépend pas du choix du représentant de $[\gamma]$ et d'après 2.5.4 c'est bien un homomorphisme de groupes. De plus, $p_*(\pi_1(E, e_0)) = \rho^{-1}(Stab_{e_0})$. (Attention ! ici l'action est à droite, ou, si l'on préfère la composition des permutations est pensée de gauche à droite).

2.5.9 Théorème (lemme général de relèvement) : Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement tel que $p(e_0) = b_0$ et soit $f : X \longrightarrow B$ une application continue telle que $f(x_0) = b_0$. Supposons X connexe par arcs et localement connexe par arcs. Il existe une application $\tilde{f} : X \longrightarrow E$ continue telle que $p \circ \tilde{f} = f$ et $e_0 = \tilde{f}(x_0)$ si et seulement si $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$. De plus, une telle \tilde{f} est unique.

Preuve :

Si $p \circ \tilde{f} = f$ il est évident qu'on doit avoir $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$, car $\tilde{f}_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(E, e_0)$. Dans l'autre sens, puisque X est connexe par arcs, pour tout $x \in X$ il existe un chemin α_x entre x_0 et x . D'après 2.5.4 il existe un unique β_x qui relève $f \circ \alpha_x$ et tel que $\beta(0) = e_0$. On pose $\tilde{f}(x) = \beta_x(1)$. Par définition on a $p \circ \tilde{f}(x) = p \circ \beta_x(1) = f \circ \alpha_x(1) = f(x)$. On doit montrer que \tilde{f} est bien définie, continue, et unique (puisque'on a fixé une image de \tilde{f} lorsqu'on a fixé le point base du relevé β .)

\tilde{f} est bien définie, i.e. sa définition ne dépend pas du choix de α_x . Soit en effet α'_x un autre chemin. $\alpha'_x * \alpha_x^{-1}$ est un lacet basé en x_0 . On a $f \circ (\alpha'_x * \alpha_x^{-1}) \in f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ et donc $f \circ (\alpha'_x * \alpha_x^{-1})$ se relève en un lacet de E basé en e_0 . Par l'unicité du relèvement le relevé de $f \circ (\alpha'_x * \alpha_x^{-1}) = (f \circ \alpha'_x) * (f \circ \alpha_x^{-1})$ est $\beta'_x * \beta_x^{-1}$. On en déduit que β'_x et β_x ont le même point final.

\tilde{f} est continue, i.e. l'image inverse d'un voisinage est un voisinage. Soient $x \in X$, $e = \tilde{f}(x)$ et $b = f(x)$. Soient U_e un voisinage ouvert de e et U_b un ouvert élémentaire qui contient b . On note V l'ouvert de $p^{-1}(U_b)$ homéomorphe à U_b et qui contient e . Les ouverts $V \cap U_e$ et $U = p(V \cap U_e)$ sont des ouverts qui contiennent e et b respectivement. Puisque f est continue, $f^{-1}(U)$ est aussi un ouvert qui contient x . Soit $W \subset f^{-1}(U)$ un voisinage de x connexe par arcs. Il suffit de montrer que $W \subset \tilde{f}^{-1}(V \cap U_e) \subset \tilde{f}^{-1}(U_e)$. En évaluant f on a $f(W) \subset f(f^{-1}(U)) \subset U$. De plus $\tilde{f}(W) \subset V \cap U_e$ à cause de l'unicité des relèvements des chemins et du fait que W est connexe par arcs. En évaluant \tilde{f}^{-1} on a $W \subset \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(W)) \subset \tilde{f}^{-1}(V \cap U_e) \subset \tilde{f}^{-1}(U_e)$.

L'unicité découle facilement de l'unicité des relèvements des chemins.

2.6 Morphismes de revêtement et actions de groupe

Dans la suite, tous les espaces seront supposés connexes par arcs et localement connexes par arcs. Remarquons que si $E \longrightarrow B$ est un revêtement il suffit de supposer E connexe par arcs et B localement connexe par arcs (pourquoi ?).

2.6.1 Définitions : Soient $p_i : E_i \longrightarrow B$, $i = 1, 2$ deux revêtements de même base. Une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ s'appelle *morphisme de revêtement* si $p_1 = p_2 \circ f$. Si, de plus, f est un homéomorphisme, alors f s'appelle *isomorphisme de revêtement* et les deux revêtements sont *isomorphes*. Lorsque $E_1 = E_2 = E$ un isomorphisme de revêtement est dit *automorphisme de revêtement*. Il est facile de voir que l'ensemble $Aut(p)$ des automorphismes d'un revêtement avec la composition d'applications est un groupe. (Si $p = p \circ f$ et $p = p \circ g$ alors

$p \circ (f \circ g) = (p \circ f) \circ g = p \circ g = p$, de plus $p = p \circ \text{Id}_E$ et si $p = p \circ f$ alors $p \circ f^{-1} = p$. Un automorphisme de p préserve la fibre de p et permute ses points.

2.6.2 Corollaire (de 2.5.9) : *Soient $p_i : E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$ deux revêtements de même base et $f, g : E_1 \rightarrow E_2$ deux morphismes de revêtement. S'il existe $e \in E_1$ tel que $f(e) = g(e)$ alors $f = g$. En particulier, le seul automorphisme de revêtement ayant un point fixe est l'identité de l'espace total.*

Preuve :

Il suffit de remarquer que f et g sont des relevés de p_1 . L'unicité démontrée en 2.5.9 permet de conclure.

2.6.3 Corollaire (de 2.5.9) : *Soient $p_i : E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$ deux revêtements de même base et soient $e_i \in E_i$, $i = 1, 2$ deux points tels que $p_1(e_1) = p_2(e_2) = b_0$.*

(a) *Il existe un morphisme de revêtement $f : E_1 \rightarrow E_2$ tel que $f(e_1) = e_2$ si et seulement si $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$.*

(b) *Le morphisme f est un isomorphisme si et seulement si l'inclusion vue dans (a) est une égalité.*

Preuve :

(a) Il suffit d'appliquer l'existence d'un relevé pour p_1 démontrée en 2.5.9.

(b) En utilisant le relevé de l'inverse de f on obtient l'inclusion dans l'autre sens, et donc l'égalité.

2.6.4 Théorème (équivalence de revêtements) : *Soient $p_i : E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$ deux revêtements de même base et soient $e_i \in E_i$, $i = 1, 2$ deux points tels que $p_1(e_1) = p_2(e_2) = b_0$. Les deux revêtements sont isomorphes si et seulement si $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1))$ est conjugué à $p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ dans $\pi_1(B, b_0)$.*

Preuve :

Soit $f : E_1 \rightarrow E_2$ un isomorphisme. On doit avoir $p_2(f(e_1)) = p_1(e_1) = b_0$, donc $e' = p_2(f(e_1))$ et e_2 appartiennent à la même fibre. D'après 2.6.3(b) on a $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, e'))$ et d'après 2.5.7 $p_{2*}(\pi_1(E_2, e'))$ et $p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$.

La réciproque est analogue. Si $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1))$ est conjugué à $p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ dans $\pi_1(B, b_0)$ d'après 2.5.7 il existe un point $e' \in p^{-1}(b_0)$ tel que $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2, e'))$ et il suffit de appliquer encore une fois 2.6.3(b).

2.6.5 Définitions, remarques et exemples :

(a) Un revêtement est dit *universel* si son espace total est simplement connexe. 2.6.3 implique qu'un tel revêtement est unique à isomorphisme près.

(b) Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est dit *régulier* ou *galoisien* si $p_*(\pi_1(E, e_0))$ est distingué dans $\pi_1(B, b_0)$. 2.6.3 implique que le fait d'être galoisien ne dépend que du revêtement et non du choix de e_0 ou de b_0 .

Un revêtement universel est régulier. Les revêtements $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{T}^n$, $n \geq 1$ et $\mathbf{S}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^n$, $n \geq 2$ sont des revêtements universels. Le revêtement $\mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$,

$z \mapsto z^n$ est régulier mais pas universel. On verra (avec un dessin) un exemple de revêtement non régulier.

2.6.6 Corollaire (caractérisations des revêtements réguliers) : *Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est régulier si et seulement si $\text{Aut}(p)$ agit (simplement) transitivement sur la fibre $p^{-1}(b_0)$ si et seulement si dans l'image de la monodromie $\rho(\pi_1(B, b_0))$ le stabilisateur de e_0 est réduit à l'identité.*

Avant de pouvoir présenter la preuve on a besoin d'introduire quelques définitions :

2.6.7 Définitions : On rappelle la notion d'*action d'un groupe* : on dit que un groupe G agit ou opère sur un ensemble Z s'il existe une application $G \times Z \rightarrow Z$, $(g, z) \mapsto gz$ telle que (a) $1_G z = z$ pour tout $z \in Z$ avec 1_G l'élément neutre de G , (b) pour tous $g, h \in G$ et pour tout $z \in Z$ on doit avoir $(gh)z = g(hz)$. De façon équivalente une action de G sur Z est déterminée par un morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Sym}(Z)$, où $\text{Sym}(Z)$ dénote le groupe des permutations de Z . Dans le cas où Z a une structure supplémentaire (e.g. topologie, métrique, structure algébrique) on pourra demander que l'action la préserve (i.e. l'image de $G \rightarrow \text{Sym}(Z)$ sera contenue dans le sous-groupe des homéomorphismes, des isométries, des isomorphismes, etc).

On appelle *orbite* par G d'un point $z \in Z$ l'ensemble $G.z = \{gz \in Z \mid g \in G\}$. On appelle *stabilisateur* d'un point z le sous-groupe $G_z = \{g \in G \mid gz = z\}$. On appelle *ensemble fixe* de G l'ensemble $Z^G = \{z \in Z \mid gz = z \forall g \in G\}$. Notons que si H est un sous-groupe de G , H agit sur Z et toute orbite de G se décompose en une union disjointe d'orbites de H .

On dit que G agit *transitivement* sur Z si pour tous $z, z' \in Z$ il existe $g \in G$ tel que $z' = gz$. L'action est *simplement transitive* si pour tous $z, z' \in Z$ il existe un unique $g \in G$ tel que $z' = gz$.

On dit que G agit de *librement* si le stabilisateur de tout point est trivial.

Preuve de 2.6.6 :

$\text{Aut}(p)$ opère (simplement) transitivement sur la fibre de b_0 si et seulement si pour tous e, e' dans la fibre de b_0 il existe un (nécessairement unique (2.6.2)) automorphisme de revêtement tel que $f(e) = e'$. 2.6.3 dit que cela est le cas si et seulement si pour tous e, e' dans la fibre de b_0 $p_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\pi_1(E, e'))$. 2.5.7 implique que cela est le cas si et seulement s'il y a un seul élément dans la classe de conjugaison de $p_*(\pi_1(E, e))$, i.e. $p_*(\pi_1(E, e))$ est distingué dans $\pi_1(B, b_0)$.

Remarquons que les éléments de $\rho(\pi_1(B, b_0))$ qui stabilisent e_0 sont précisément ceux de $\rho(p_*(\pi_1(E, e)))$, i.e. les lacets de $\pi_1(B, b_0)$ qui se relèvent en E en de lacets basés en e_0 . On suppose que $\rho(\pi_1(B, b_0))_{e_0} = \{\text{Id}_{p^{-1}(b_0)}\}$. Puisque le noyau de ρ stabilise e_0 on doit avoir $p_*(\pi_1(E, e)) = \ker \rho$ qui est donc distingué. Réciproquement, il faut montrer que si $p_*(\pi_1(E, e))$ est distingué, alors on a $\rho(p_*(\pi_1(E, e))) = \{\text{Id}_{p^{-1}(b_0)}\}$. On sait (2.6.3) que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e'))$

pour tout $e' \in p^{-1}(b_0)$, donc le raisonnement fait pour e_0 vaut aussi pour tout $e' \in p^{-1}(b_0)$ et on peut conclure que $\rho(p_*(\pi_1(E, e))) = \rho(\pi_1(B, b_0))_{e'}$ pour tout $e' \in p^{-1}(b_0)$, mais la seule permutation qui stabilise tout élément de $p^{-1}(b_0)$ est $\text{Id}_{p^{-1}(b_0)}$.

2.7 Lien avec le groupe fondamental et classification des revêtements

2.7.1 Définitions : Soit H un sous-groupe d'un groupe G . On appelle *normalisateur de H dans G* , et on le note $\mathcal{N}_G(H)$, le plus grand sous-groupe de G qui contient H et tel que H est distingué dans $\mathcal{N}_G(H)$. Il est facile de voir que $\mathcal{N}_G(H)$ coïncide avec l'ensemble des éléments de G qui laissent H invariant par conjugaison. On voit aussi que H est distingué dans G si et seulement si $\mathcal{N}_G(H) = G$.

2.7.2 Théorème : Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement tel que $p(e_0) = b_0$. On a

$$\text{Aut}(p) \cong \mathcal{N}_{\pi(B, b_0)}(p_*(\pi_1(E, e_0))) / p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

En particulier $\text{Aut}(p) \cong \pi(B, b_0) / p_*(\pi_1(E, e_0))$ si p est régulier et $\text{Aut}(p) \cong \pi(B, b_0)$ si p est le revêtement universel. Si p est régulier on peut identifier $\text{Aut}(p)$ avec l'image de la monodromie (voir 2.6.6).

Preuve :

On pose $N = \mathcal{N}_{\pi(B, b_0)}(p_*(\pi_1(E, e_0)))$. On va définir un homomorphisme de groupes $\phi : N \rightarrow \text{Aut}(p)$. Soit $[\gamma] \in N$ on lui associe par ϕ l'automorphisme de revêtement f_γ tel que $f_\gamma(e_0) = \tilde{\gamma}_{e_0}(1)$, où $\tilde{\gamma}_{e_0}$ dénote l'unique relevé de γ tel que $\tilde{\gamma}_{e_0}(0) = e_0$.

ϕ est bien défini. On sait grâce à 2.5.5 que $\tilde{\gamma}_{e_0}(1)$ ne dépend pas du choix de γ dans $[\gamma]$. On sait aussi que si un tel f_γ existe, il est nécessairement unique, par 2.6.2. Il reste à montrer que f_γ existe. Cela découle de 2.6.3. En effet $p_*(\pi_1(E, e_0)) = \varphi_\gamma(p_*(\pi_1(E, e_0)))$ car $[\gamma]$ normalise $p_*(\pi_1(E, e_0))$ par hypothèse. Par ailleurs, $\varphi_\gamma(p_*(\pi_1(E, e_0))) = p_*(\pi_1(E, \tilde{\gamma}_{e_0}(1)))$ par 2.2.7 et 2.5.4.

ϕ est un homomorphisme de groupes. On considère $[\gamma * \gamma'] = [\gamma] * [\gamma']$ dans N . On pose $f = \phi([\gamma])$, $g = \phi([\gamma'])$ et $h = \phi([\gamma * \gamma'])$. L'unicité des relevés des chemins implique $\gamma * \gamma'_{e_0} = \tilde{\gamma}_{e_0} * \tilde{\gamma}'_{\tilde{\gamma}_{e_0}(1)}$. De plus, $f \circ \tilde{\gamma}'_{e_0}$ est un relevé de γ' basé en $f(\tilde{\gamma}'_{e_0}(0)) = f(e_0) = \tilde{\gamma}_{e_0}(1)$. Encore à cause de l'unicité des relèvement des chemins on a $f \circ \tilde{\gamma}'_{e_0} = \tilde{\gamma}'_{\tilde{\gamma}_{e_0}(1)}$. En conséquence $h(e_0) = \tilde{\gamma}'_{\tilde{\gamma}_{e_0}(1)}(1)$ et $f \circ g(e_0) = f(\tilde{\gamma}'_{e_0}(1)) = \tilde{\gamma}'_{\tilde{\gamma}_{e_0}(1)}(1)$ et les deux images coïncident donc par ϕ grâce à 2.6.2.

ϕ est surjectif. Soit $f \in \text{Aut}(p)$. Posons $e_1 = f(e_0)$. Soit α un chemin entre e_0 et e_1 . Le chemin $p \circ \alpha$ est un lacet de B basé en b_0 qui conjugue $p_*(\pi_1(E, e_0))$ à $p_*(\pi_1(E, e_1))$ par construction. Par ailleurs, d'après 2.6.3 ces deux sous-groupes coïncident, et donc la classe de $p \circ \alpha$ est dans N . $\phi(p \circ \alpha) = f_\alpha$, à cause de l'unicité du relèvement, et puisque $f_\alpha(e_0) = \alpha(1) = e_1 = f(e_0)$, $f = f_\alpha = \phi(p \circ \alpha)$ et ϕ est surjectif.

$\ker(\phi) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. On a $\phi([\gamma]) = \text{Id}_E$ si et seulement si $\phi([\gamma])(e_0) = e_0$ si et seulement si $\tilde{\gamma}_{e_0}(1) = e_0$ si et seulement si $[\tilde{\gamma}_{e_0}] \in \pi_1(E, e_1)$ si et seulement si $p_*([\tilde{\gamma}_{e_0}]) = [\gamma] \in p_*(\pi_1(E, e_1))$.

2.7.3 Exemples :

(a) Ce théorème permet de montrer, grâce à un exercice vu en TD, que $\pi_1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ et, plus en général, que $\pi_1(\mathbf{T}^n) \cong \mathbb{Z}^n$. Soit H un sous-groupe, nécessairement distingué de $\pi_1(\mathbf{S}^1)$. $H = n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$. On cherche à reconnaître les revêtement $p : E \longrightarrow \mathbf{S}^1$ associés à H , i.e. tels que $H = p_*(\pi_1(E))$.

Si $n = 0$, $H = 1$ et p est le revêtement universel $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{S}^1$. $\text{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par $x \mapsto x + 1$.

Si $n = 1$, $H = \mathbb{Z}$ et $p = \text{Id}_{\mathbf{S}^1}$ est le revêtement identique avec groupe d'automorphismes trivial.

Si $n \neq 0, 1$, H correspond au revêtement à n feuillets ou d'ordre n (i.e. n est le cardinal de la fibre) $p : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1$, défini par $z \mapsto z^n$. On a $\text{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est engendré par $z \mapsto e^{2i\pi/n}z$.

(b) L'espace projectif réel de dimension $n \geq 2$ admet seulement deux revêtements : le revêtement universel et le revêtement identique. Son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.7.4 Définitions : Soit G un groupe qui agit par homéomorphismes sur un espace topologique X . On dit que l'action est *discontinue* si tout point $x \in X$ admet un voisinage U_x tel que $U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset$ seulement pour un nombre fini de g . On dit que l'action est *proprement discontinue* si tout point $x \in X$ admet un voisinage U_x tel que $U_x \cap g(U_x) \neq \emptyset$ implique $g = 1_G$. Une action est dite *propre* si pour tout compact $K \subset X$ on a $K \cap g(K)$ seulement pour un nombre fini de g .

2.7.5 Remarques :

(i) Soit G un groupe agissant de façon proprement discontinue sur un espace topologique X . La projection canonique p de X sur l'espace des orbites de G , X/G est un revêtement régulier. En effet, soient $x \in X$ et U_x l'ouvert de la définition. La famille $\{g(U_x)\}_{g \in G}$ est une famille d'ouverts deux à deux disjoints, par hypothèse. L'image des éléments de cette famille dans X/G est un ouvert $V_{[x]}$, par définition de la topologie quotient. Par construction on a $p^{-1}(V_{[x]}) = \cup_{g \in G} g(U_x)$ et donc $V_{[x]}$ est bien un ouvert élémentaire. Il est aussi facile de voir que p est un homéomorphisme local et donc un revêtement, régulier car G agit transitivement sur la fibre par construction.

(ii) Réciproquement, $\text{Aut}(p)$ agit de façon (libre et) proprement discontinue sur E . Si, de plus, p est galoisien, donc $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur la fibre, alors $E/\text{Aut}(p) \cong B$. Ceci découle du fait que le revêtement p et la projection canonique de E sur $E/\text{Aut}(p) \cong B$ sont continus et ouverts.

2.7.6 Théorème : *Supposons que l'espace B admet revêtement universel $q : \tilde{B} \longrightarrow B$. Alors, pour toute classe de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(B)$, il*

existe un revêtement $p : E \longrightarrow B$, unique à isomorphisme de revêtement près, tel que $p_*(\pi_1(E))$ appartient à la classe.

Preuve :

Soient $b_0 \in B$ et $\tilde{b}_0 \in \tilde{B}$ tel que $q(\tilde{b}_0) = b_0$. Soit $\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \text{Aut}(q)$ et soit $G \subset \pi_1(B, b_0)$ un sous-groupe. Les remarques précédentes nous permettent d'identifier B avec $\tilde{B}/\text{Aut}(q)$ et de dire que la projection canonique $r : \tilde{B} \longrightarrow \tilde{B}/\phi(G)$ est un revêtement. Soit $\bar{q} : \tilde{B} \longrightarrow \tilde{B}/\text{Aut}(q)$ la projection canonique, qui est encore un revêtement. Il nous reste à montrer que l'application $p : \tilde{B}/\phi(G) \longrightarrow \tilde{B}/\text{Aut}(q)$ est un revêtement. Puisque toute orbite de $\phi(G)$ sur \tilde{B} est contenue dans une unique orbite de $\text{Aut}(q)$ sur \tilde{B} , p est univoquement définie. De plus, l'action de $\phi(G)$ induit une action de permutation sur les voisinages ouverts V_i de l'image réciproque d'un ouvert élémentaire $U \subset B$. On en déduit que p est un revêtement. Il nous reste à vérifier que $p_*(\pi_1(\tilde{B}/\phi(G), r(b_0))) = G$. Un élément $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ est dans $p_*(\pi_1(\tilde{B}/\phi(G), r(b_0)))$ si et seulement si son relevé basé en $r(b_0)$ est un lacet de $\tilde{B}/\phi(G)$ si et seulement s'il existe $f \in \phi(G)$ tel que $f(\tilde{b}_0) = f(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{\gamma}(1)$ (i.e. les extrémités du relevé de γ dans \tilde{B} , qui est aussi le relevé du relevé, sont identifiées par l'action d'un élément de $\phi(G)$) si et seulement si $f = \phi([\gamma]) \in \phi(G)$ si et seulement si $[\gamma] \in G$.

2.7.7 Théorème : *Soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. X admet un revêtement universel $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ si et seulement si X est semilocalement simplement connexe.*

2.7.8 Définitions et remarques : Un espace topologique est *localement simplement connexe* si tout point admet un voisinage simplement connexe. X est *semilocalement simplement connexe* si tout point admet un voisinage U pour lequel $j_*(\pi_1(U)) = 1$, où j_* dénote l'homomorphisme induit par l'inclusion canonique j de U dans X . Il est clair qu'un espace localement simplement connexe est aussi semilocalement simplement connexe. Les espaces qu'on utilise habituellement (variétés, complexes,...) ont ces propriétés.

Idée de la preuve de 2.7.7 :

Nécessité. Soit $x \in X$ et U un voisinage élémentaire de x connexe par arcs. Soit V une composante connexe de $p^{-1}(U)$ et soient j_V, j_U les inclusions naturelles de V et U dans \tilde{X} et X respectivement. On a trivialement $j_U \circ p|_V = p \circ j_V$, d'où $j_{U*} \circ p|_{V*} = p_* \circ j_{V*}$. Or $\pi_1(\tilde{X}) = 1$ par définition, et donc l'application j_{V*} est constante et égale à 1. Puisque p_* est injective ainsi que $p|_{V*}$ on doit avoir que $j_{U*}(\pi_1(U)) = 1$. X est donc semilocalement simplement connexe.

Suffisance. \tilde{X} doit être en bijection avec l'ensemble

$$\Gamma = \{\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \mid \alpha(0) = x_0\} / \simeq$$

des chemins de X basés en x_0 à homotopie près. Ceci découle du lemme suivant, qui est laissé en exercice.

2.7.9 Lemme : *Deux chemins de X se relèvent dans le revêtement universel \tilde{X} avec même point final si et seulement s'il sont homotopes, par une homotopie de chemins, dans X .*

Pour terminer la preuve il faudrait encore montrer que l'application p , définie sur Γ et à valeurs dans X telle que $p([\alpha]) = \alpha(1)$, est un revêtement et que Γ est simplement connexe.

2.7.10 Applications et corollaires :

- 1 Soit F_n le groupe libre à n générateurs. On a vu que F_n est le groupe fondamental du bouquet de n cercles X_n , qui admet comme revêtement universel *l'arbre infini de valence $2n$* . Si G est un sous-groupe de F_n on sait alors qu'il existe un revêtement de X_n d'espace total Y_G tel que $\pi_1(Y_G) = G$. On sait que X_n et Y_G sont localement homéomorphes et on en déduit que Y_G est un graphe. On a déjà remarqué que le groupe fondamental d'un graphe est libre et on en déduit le résultat suivant : *tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.*
- 2 La surface orientable de genre $g \geq 2$ est un revêtement régulier de la surface de genre 2 et le groupe des automorphismes est cyclique d'ordre $g - 1$.
- 3 Si $K \neq \emptyset$ est un compact dans \mathbb{R}^2 alors $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus K) \neq 1$.

ANNEXE : Variétés topologiques, complexes simpliciaux, et classification des surfaces

Les variétés et les complexes simpliciaux sont parmi les espaces topologiques les plus simples à décrire et étudier. Vous avez très probablement déjà rencontré la notion de variété différentiable. Dans ce contexte, on ne s'intéresse que à la topologie de l'espace et on peut donc oublier sa structure différentielle. On introduit alors la notion de **variété topologique** :

A.1 Définitions et remarques : Un espace topologique X est une *variété topologique de dimension n* si

- 1 X est Hausdorff ;
- 2 X admet une base dénombrable pour sa topologie ;
- 3 X est *localement euclidien (de dimension n)*, i.e. tout point de X admet un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de \mathbb{R}^n .

Une *surface* est une variété topologique de dimension 2.

Une variété différentiable est, a fortiori, une variété topologique.

Il y a des espaces euclidiens qui ne sont pas Hausdorff (e.g. identifier deux droites sauf sur un point).

La condition 2 est automatiquement vérifiée si X est compact.

Il y a aussi une notion de *variété topologique à bord*. Dans ce cas on permet pour certains points P des voisinages de la forme $(U, P) \cong (\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1, x_n \geq 0\}, 0)$, (P est un *point du bord*).

A.2 Définitions, exemples et remarques :

Un n -simplexe ou *simplexe de dimension n* est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points indépendants dans \mathbb{R}^{n+1} , qu'on appelle *sommets du simplexe*. On peut choisir comme sommets, par exemple, les $n + 1$ points $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, 1)$. Il est immédiat de voir qu'un 0-simplexe est un point, un 1-simplexe un segment fermé, un 2-simplexe un triangle, un 3-simplexe un tétraèdre,...

Une *face* d'un simplexe est tout simplexe obtenu comme enveloppe convexe d'un sous-ensemble de sommets du simplexe. Les *sommets* sont donc des faces de dimension zéro.

Un *complexe simplicial* (qu'on supposera fini) est une collection (finie) K de simplexes tels que si σ est un simplexe de K et τ une face de σ , alors τ aussi est dans K . De plus, l'intersection de deux simplexes de K est soit vide, soit une face des chacun de deux simplexes. On appelle *dimension* de K le maximum des dimensions de ses simplexes. Un n -complexe est dit de *dimension pure* égale à n si tous ses simplexes sont contenus dans au moins un simplexe de dimension n . Par exemple, la réunion de toutes les faces d'un n -simplexe est un complexe simplicial de dimension (pure) égale à n .

On peut définir une topologie sur K , induite par celles de ses simplexes pour laquelle un sous-ensemble est ouvert si et seulement si son intersection avec chaque simplexe de K est ouverte. Une sous-collection des simplexes de K est un *sous-complexe* s'il est, à son tour, un complexe simplicial. Par exemple, la collection de tous les simplexes de K de dimension au plus n est un sous-complexe, appelé le *n -squelette* de K .

On peut montrer, que le groupe fondamental d'un complexe simplicial est isomorphe à celui de son 2-squelette. Ceci découle du fait qu'un simplexe est contractile et donc deux chemins dans un simplexe sont homotopes si et seulement s'ils commencent et aboutissent aux mêmes points. Si γ est un lacet dans un complexe simplicial, soit il est contenu dans un simplexe et il est donc homotopiquement trivial, soit il rencontre plusieurs simplexes. Le raisonnement vu, montre qu'on peut pousser les arcs contenus dans un simplexe sur le bord de celui-ci, ce qui montre que tout lacet est homotope à un lacet contenu dans le 1-squelette. Il reste à montrer que l'image de toute homotopie entre lacets dans le 1-squelette peut être choisie de façon que son image soit contenue dans le 2-squelette.

On dit qu'un espace topologique X *admet une triangulation* s'il est homéomorphe à un complexe simplicial K (qu'on appelle *triangulation* de X). Par exemple, la boule fermée de dimension n admet une triangulation : il suffit de prendre pour K le complexe obtenu comme union de toutes les faces d'un n -simplexe. Le $(n - 1)$ -squelette de ce K coïncide avec son bord et est homéomorphe à la sphère de dimension $n - 1$ qui admet donc une triangulation.

Il y a aussi une notion de *complexe abstrait* : il s'agit d'un ensemble V et d'une sous-ensemble S de $\mathcal{P}(V)$ tel que

1. les éléments de S (appelés *simplexes*) ont cardinal fini ;
2. tout v dans V appartient à au moins un simplexe de S et à au plus un nombre fini de simplexes ;
3. si $s \in S$ et $s' \subset s$, alors $s' \in S$.

On peut associer à chaque complexe simplicial K un complexe abstrait fini (V sera l'ensemble des sommets de K). Réciproquement, on peut construire, à partir d'un complexe abstrait, un complexe simplicial...

Le *théorème de Rado* affirme que toute surface admet une triangulation et peut donc être obtenue comme recollement de triangles. Nous verrons en TD l'idée de la preuve de ce théorème, sous l'hypothèse que la surface est compacte (et connexe). Ce fait nous permettra de donner une classification des surfaces compactes, connexes et closes, qu'on décrira de façon combinatoire. En effet, le théorème de Rado nous permet de dire que toute surface compacte est obtenue comme union d'une famille finie de triangles recollés le long de leurs arêtes. Puisque une surface est un espace localement euclidien (sans bord), une arête de la triangulation doit appartenir à précisément deux triangles. On considère la famille des triangles de la triangulation. On peut recoller les triangles en respectant les identifications le long de certaines arêtes de façon que le résultat soit connexe (cela est possible car la surface est supposée connexe) et donc un disque, dont le bord est une union d'arêtes. On peut considérer ce disque comme un polygone avec un nombre pair d'arêtes. (On obtient le même résultat en découpant la surface le long de certaines arêtes bien choisies). On marque avec la même lettre deux arêtes du polygone qui sont identifiées dans la surface et on fixe des orientations sur les arêtes, de façon qu'elles soient respectées par l'identification qui donne la surface.

On peut d'abord supposer que soit tous les sommets du polygone sont identifiés, soit le polygone est un bigone dont l'identification donne la 2-sphère.

Si deux arêtes avec la même lettre ont la même orientation, on peut supposer qu'elles se suivent. (*crosscap*)

Si deux arêtes avec la même lettre sont séparés des deux côtés par deux autres arêtes avec la même lettre et les arêtes avec la même lettre n'ont pas la même orientation on peut supposer que ces quatre arêtes se suivent. (*handle*).

Si les deux situations vues se présentent dans un même polygone, on peut supposer que toutes les arêtes avec la même lettre se suivent et ont la même orientation.

Cela donne précisément les cas considérés dans le chapitre précédent et la classification des surfaces est complète.