

FEUILLE D'EXERCICES n° 3

RACINES D'UN POLYNÔME ET FACTORISATION

Exercice 1

Montrer que deux polynômes P et Q de degré n de $\mathbb{C}[X]$ prenant les mêmes valeurs pour strictement plus de n valeurs sont égaux.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ qui est scindé (c'est automatique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Montrer que les racines de P sont simples si et seulement si P est premier avec P' .

Exercice 3

Montrer que pour $n \geq 2$, le polynôme $P = X^n + X + 1$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4

A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{C}$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + \alpha$ admet-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

Exercice 5

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $P = X^5 + aX^2 + 15X + 6$ ait une racine triple dans $\mathbb{R}$. Factoriser alors P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6

- (1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P est divisible par son polynôme dérivé. En déduire que toute racine de P' est racine de P .
- (2) En déduire quels sont les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ qui sont divisibles par leur polynôme dérivé. (*On pourra raisonner à partir du nombre de racines distinctes de P' , et comparer les degrés.*)

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que les racines complexes du polynôme $Y^{n-1} + Y^{n-2} + \dots + Y + 1$ sont les racines n -ièmes de l'unité distinctes de 1.

- (1) Soit $\alpha = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1 écrit sous forme polaire. Montrer que $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.
- (2) Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

$$i) \quad P = X^4 + X^2 + 1, \quad ii) \quad P = X^8 + X^4 + 1, \quad iii) \quad P = X^6 + 1.$$

(*On pourra s'aider de changements de variables sur l'indéterminée X .*)

Exercice 8

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A, B, C trois polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que C est premier avec A et avec B . Montrer que C est premier avec AB .

Exercice 9

Soient λ, μ deux éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $\lambda \neq \mu$. Montrer que si $m, n \geq 1$ sont des entiers non nuls, alors $(X - \lambda)^m$ et $(X - \mu)^n$ sont premiers entre eux.

Exercice 10

On considère $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

- (1) Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
- (2) En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 12

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines n -ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

- (1) Déterminer un polynôme de degré n admettant pour racines les $\frac{1}{2 - \alpha_k}$ pour $k = 1, \dots, n$.
- (2) En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2 - \alpha_k}$$

(Indication : on pensera à déterminer la somme des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.)

Exercice 13

[racines rationnelles] Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$.

- (1) On suppose qu'un rationnel $\frac{p}{q}$ est racine de P , avec p et q entiers relatifs premiers entre eux. Montrer que q divise a_n et p divise a_0 .
- (2) Factoriser le polynôme $3X^3 - X^2 + 15X - 5$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet au moins une racine rationnelle.
- (3) Montrer que le polynôme $X^5 + X^4 - 3$ n'a pas de racine rationnelle.

Exercice 14

[Relations entre les coefficients et les racines]

- (1) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 2. On note α_1, α_2 les racines (pas nécessairement distinctes) de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$b = -a(\alpha_1 + \alpha_2), \quad c = a\alpha_1\alpha_2.$$

- (2) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 3. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les racines (pas nécessairement distinctes) de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$b = a(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad c = a(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3), \quad d = -a\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Exercice 15

[équation du troisième degré] Soient p, q des nombres réels avec $(p, q) \neq (0, 0)$. On considère la fonction $P(x) = x^3 + px + q$ et on pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

- (1) Montrer que si $p \geq 0$, alors l'équation $x^3 + px + q = 0$ n'admet qu'une seule racine réelle. On étudiera les variations de la fonction P .
- (2) On suppose dans cette question que $p < 0$. On pose $\alpha = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $k = P(\alpha)P(-\alpha)$.
 - (a) Montrer que $k = \frac{\Delta}{27}$.
 - (b) En étudiant les variations de la fonction P , justifier la discussion suivante sur le nombre de racines réelles de l'équation $x^3 + px + q = 0$:
 - $k < 0$: 3 racines
 - $k > 0$: 1 racine
 - $k = 0$: 2 racines
- (3) Dédire des questions 1 et 2 précédentes, la discussion finale suivante sur le nombre de racines réelles de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$:
 - $\Delta < 0$: 3 racines
 - $\Delta > 0$: 1 racine
 - $\Delta = 0$: 2 racines
- (4) Montrer que si $u, v \in \mathbb{C}$ vérifient

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= \frac{-p}{3} \end{cases}$$

alors $u + v$ est racine de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

- (5) En déduire que quand $\Delta > 0$, l'unique racine réelle de l'équation $x^3 + px + q = 0$ est donnée par la formule suivante (formule de Cardan) :

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

Exercice 16

On pose $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- (1) Quel est le degré de P ?
- (2) Montrer que P a au moins deux zéros réels entiers, et donner leur ordre de multiplicité.
- (3) On pose $j = e^{i2\pi/3}$. Montrer que $e^{i2\pi/3} + 1 = e^{i2\pi/6}$. Montrer que $P(X)$ est divisible par $X - j$.
- (4) Factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17

[Intégrité, pour ceux qui connaissent $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$] Chercher un polynome de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ qui a strictement plus que 2 racines. En donner plusieurs factorisations distinctes.