

PRÉSENTATION DES TRAVAUX ET PROGRAMME DE RECHERCHE

RIGIDITÉS ENTRE GÉOMÉTRIE ET DYNAMIQUE

MARTIN MION-MOUTON

Ce texte est une présentation de mes travaux et de mon programme de recherche, dont je donne dans la section 1 ci-dessous un résumé thématique.

J'introduis ensuite plus en détail mes travaux de recherche ainsi que les domaines dans lesquels ils s'inscrivent dans les sections 2 à 5, qui peuvent être lues de manière indépendantes. La section 2 est totalement autonome et distincte des trois suivantes : elle présente mes travaux les plus récents, dans une direction de recherche nouvelle qui constitue désormais une partie importante de mon programme de recherche. Les sections 3, 4 et 5 nourrissent pour leur part des connexions qui apparaîtront au fil du texte, sans ce que cela empêche de les lire indépendamment. Les résultats (numérotés en lettres majuscules de A à J) et (pré-)publications présentés dans cette partie sont respectivement référencés dans l'[index des résultats](#) et l'[index des \(pré-\)publications](#).

Je conclus par une présentation plus détaillée de mes principaux projets de recherche dans les sections 6 et 7.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction : résumé des travaux et du programme de recherche	2
1.1. Tores de-Sitter singuliers, uniformisation et rigidité	2
1.2. Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins	3
1.3. Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois	4
Présentation des travaux	5
2. Tores de-Sitter singuliers, uniformisation et rigidité	5
2.1. Tores de-Sitter singuliers	5
2.2. Uniformisation des tores de-Sitter singuliers	7
2.3. Rigidité différentiable des feuilletages lumière	8
2.4. Rigidité du spectre marqué des longueurs de type temps	8
2.5. Géométrisation de-Sitter des caractères $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ du tore troué	9
3. Rigidité des dynamiques (partiellement) hyperboliques	9
3.1. Difféomorphismes partiellement hyperboliques et flots Anosov	9
3.2. Régularité des fibrés invariants et rigidité des flots Anosov de contact	11
3.3. Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact	12
4. Rigidité des géométries de chemins et géométries de Cartan	12
4.1. Géométries de chemins, géométries de Cartan et structures drapeaux	13
4.2. Programme de d'Ambra-Gromov pour les géométries de chemins	14
5. Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois	15
5.1. Structures drapeaux exotiques en dimension trois	16
5.2. Compactifications géométriques de flots géodésiques	16
Programme de recherche	17
6. Surfaces Lorentziennes singulières et interactions dynamiques	17
6.1. Rigidité des feuilletages lumières et des difféomorphismes par morceaux du cercle	17
6.2. Quelques perspectives sur les surfaces Lorentziennes singulières	18
7. Dynamiques (partiellement) hyperboliques : nouveaux exemples et rigidité lisse	19
7.1. Rigidité au delà du cas contact	20
7.2. Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension supérieure	21

7.3. Flots Anosov en dimension cinq par chirurgies	21
Bibliographie et index	22
Index des résultats présentés	22
Index des (pré-)publications présentées	22
Tores de-Sitter singuliers, uniformisation et rigidité (section 2)	22
Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins (sections 3 et 4)	22
Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (section 5)	22
Bibliographie	22

1. INTRODUCTION : RÉSUMÉ DES TRAVAUX ET DU PROGRAMME DE RECHERCHE

Mon travail de recherche se situe à l'intersection de la géométrie différentielle et des systèmes dynamiques. Je m'intéresse d'une manière générale aux questions faisant interagir les objets et méthodes provenant de ces deux domaines. Le thème unifiant l'essentiel de mes travaux et projets de recherche est l'exploration de *phénomènes de rigidité* apparaissant en présence d'un système dynamique « assez riche » préservant une structure géométrique « assez rigide ». Selon les questions étudiées, la rigidité peut être tour à tour imposée par la dynamique sur la géométrie, ou vice-versa. Mes travaux et projets s'inscrivent au sein de trois axes de recherche principaux que j'introduis maintenant.

1.1. Tores de-Sitter singuliers, uniformisation et rigidité. Les *surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante* sont une famille de structures géométriques en dimension deux. Si la notion locale de *singularité conique Lorentzienne* avait été introduite dans [BBS11], ces surfaces n'étaient pas encore apparues comme objet d'étude indépendant. J'initie dans [Mio24] leur étude globale et en construis de nombreux exemples. Je me concentre dans un premier temps sur les tores Lorentziens à courbure constante non-nulle appelés *tores de-Sitter singuliers*. Ces derniers ressemblent par certains aspects aux surfaces de translation [Zor06; Yoc10] ou de dilatation [DFG19; BGT25], et par d'autres aux surfaces hyperboliques dont ils constituent les analogues Lorentziens.

1.1.1. Uniformisation par des tores de-Sitter singuliers, rigidité de leur spectre marqué des longueurs de type temps, et géométrisation de-Sitter (section 2). Le théorème d'uniformisation de Klein-Poincaré montre que toute *classe conforme de métriques Riemanniennes*¹ sur une surface fermée contient une unique métrique à courbure constante, ce que prolongent les travaux de Troyanov [Tro86; Tro91] pour les métriques Riemanniennes singulières. Ces résultats peuvent être informellement résumés comme répondant positivement aux deux questions suivantes : *toute classe conforme contient-elle une métrique à courbure constante, et si oui est-elle unique ?* Les travaux présentés à la section 2 contribuent à cette question d'*uniformisation* dans le cas Lorentzien [Mio24]. Ils fournissent une *description partielle de l'espace de déformation des tores de-Sitter à une singularité par la dynamique de leurs feuilletages lumières* (théorème A).

Les tores de-Sitter singuliers portent un système dynamique d'origine géométrique : une paire de *feuilletages lumières transverses*.² Dans les cas qui nous intéressent, ces feuilletages sont les suspensions de *difféomorphismes par morceaux du cercle*, qui sont topologiquement conjugués³ à des rotations [Den32] lorsqu'ils sont *minimaux* (*i.e.* lorsque toutes leurs orbites sont denses). Les sauts des dérivées fournissent des obstructions évidentes à ce que cette conjugaison continue soit *lisse*, et l'on peut se demander si ce sont les seules. On parle alors de *rigidité différentiable* lorsque *toute conjugaison topologique entre deux systèmes dynamiques minimaux est nécessairement lisse*. La rigidité différentiable des dynamiques du cercle est un problème ancien [Gha21, §1] qui a été

1. *I.e.* l'ensemble des métriques pg avec g une métrique Riemannienne et ρ une fonction lisse strictement positive. Une telle classe conforme est équivalente à une *structure complexe* sur une surface.

2. L'existence de feuilletages induits par la géométrie peut être rapprochée du cas des surfaces de translation ou de dilatation. À la différence de ces dernières qui admettent une *famille à un paramètre* de feuilletages directionnels, une *paire* de feuilletages est cependant ici singularisée.

3. Deux applications $f: M \rightarrow M$ et $g: N \rightarrow N$ sont *conjuguées par* $\varphi: M \rightarrow N$ si $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

complètement résolu pour les difféomorphismes du cercle [Arn64; Her79; Yoc84a], mais demeure essentiellement ouvert pour ses difféomorphismes *par morceaux* pour lesquels la rigidité différentiable n'est prouvée que dans le cas d'une unique singularité [KKM17]. Les travaux présentés à la section 2 ont pour corollaire la rigidité différentiable des feuilletages lumières de tores de-Sitter, à travers le résultat géométrique suivant [Mio24]. *Entre deux tores de-Sitter ayant une unique singularité du même angle et des feuilletages lumières minimaux, toute équivalence topologique entre les bi-feuilletages lumières préservant les singularités est une isométrie* (théorème B).

Le *spectre marqué des longueurs* d'une surface Riemannienne à courbure négative est la fonction définie sur le groupe fondamental par la longueur de l'unique représentant géodésique dans chaque classe d'homotopie libre. La *conjecture de Burns-Katok* [BK85] suggère que ce spectre marqué est *rigide* (i.e. détermine la géométrie de la surface à isotopie près), ce qui a motivé de nombreux travaux [Ota90; Cro90; HP97; BL18] apportant des réponses positives partielles.⁴ Les tores de-Sitter à une singularité ont à ce titre un comportement similaire à la courbure négative Riemannienne [Mioona], ce qui autorise à introduire dans leur cas une notion analogue de *spectre marqué des longueurs de type temps*. Dans un travail en cours de rédaction [Mioonb], je mets en avant une rigidité importante de ce spectre marqué au regard de la conjecture de Burns-Katok : *les longueurs d'une paire de classes d'homotopies de type temps de nombre d'intersection un déterminent la structure de-Sitter à isotopie près* (théorème C).

La dynamique du *groupe modulaire* sur les *variétés des caractères relatives* est mieux comprise dans les cas correspondant à des structures géométriques [Gol03]. Dans cette perspective, nous établissons dans un travail en préparation avec Florestan Martin-Baillon et Maxime Wolff [MMWon] la *géométrisation de-Sitter des caractères* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ du tore troué (théorème D).

1.1.2. *Rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle, et perspectives sur les surfaces Lorentziennes singulières* (section 6). L'une des motivations d'origine de mon premier travail sur les tores de-Sitter [Mio24] est d'appliquer le résultat de rigidité géométrique obtenu sur leurs feuilletages lumières (théorème B) au problème dynamique de *rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle*. Ceci fait l'objet d'un programme de recherche de long terme en collaboration avec Selim Ghazouani et Konstantin Khanin, présenté au paragraphe 6.1. L'idée générale est de ramener le problème dynamique étudié à une question de nature purement géométrique, exploitant ainsi pleinement des symétries observées précédemment [GK22] mais dont la structure géométrique sous-jacente n'avait pas encore été décelée.

Les surfaces Lorentziennes singulières constituent une nouvelle famille de structures géométriques pour le moment essentiellement inexplorée. Ceci ouvre un large champ de recherches de long terme à leur sujet, dans de nouvelles directions topologiques (surfaces de genre supérieur), géométriques (métriques Lorentziennes singulières à courbure variable) ou dynamiques (asymptotique du nombre de géodésiques fermées de type temps et dynamique du groupe modulaire sur les variétés des caractères) dont je présente au paragraphe 6.2 quelques-uns des enjeux principaux.

1.2. **Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins.** Les *systèmes (partiellement) hyperboliques* sont une famille importante de systèmes dynamiques définis sur les variétés différentielles compactes. Leur étude, en grande partie motivée par leurs liens avec diverses questions de stabilité et de robustesse⁵, s'est progressivement imposée comme un sujet de recherche majeur au sein des systèmes dynamiques.⁶ Ces systèmes sont caractérisés par l'existence d'une *structure géométrique* préservée par leurs différentielles, qui est une décomposition du fibré tangent en somme de trois fibrés invariants. Les exemples fondamentaux de tels systèmes sont d'origine algébrique. Bien que les fibrés invariants soient en général seulement continus, ils sont *lisses* (i.e. de classe C^∞) pour ces *exemples algébriques*.

4. Des travaux plus récents ont réalisé des avancées majeures concernant les variétés Riemanniennes dont le flot géodésique est Anosov [GL19].

5. La *transitivité robuste* impose par exemple à un difféomorphisme d'une variété fermée de dimension trois d'être *partiellement hyperbolique* selon [DPU99; BDP03] (voir par exemple [Pot18, §2] pour plus de détails).

6. On renvoie à l'excellent survol [Pot18] du domaine pour un exposé de ses motivations et questions principales.

1.2.1. *Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques, et programme de d’Ambra-Gromov pour les géométries de chemins (sections 3 et 4).* Le rôle central joué par le degré de régularité des fibrés invariants a été mis en évidence dès les origines de la théorie [Año69], et l’on s’attend à ce que les exemples algébriques soient « les seuls » dont les fibrés invariants sont lisses. Ceci soulève la question suivante : *tout système (partiellement) hyperbolique dont les fibrés invariants sont lisses est-il conjugué³ de manière lisse à un exemple algébrique ?* Cette question de *rigidité lisse* a motivé de nombreux travaux [Ghy87 ; Kan88 ; HK90 ; BFL92 ; BL93 ; Fan05] qui y ont apporté des réponses positives partielles dans le cas des *flots Anosov* ou difféomorphismes Anosov. Le cas des *difféomorphismes partiellement hyperboliques* introduit des problématiques nouvelles qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes utilisées dans le cas Anosov. Les travaux présentés dans la section 3 initient l’étude de cette question pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques. J’obtiens dans [Mio22b] un *résultat de classification des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact à fibrés invariants lisses* (théorème E).

Ce résultat de classification dynamique est d’origine géométrique. Il repose sur un phénomène de *rigidité* qui peut être résumé informellement de la manière suivante. « Une structure géométrique suffisamment rigide et admettant des automorphismes dont la dynamique est suffisamment riche, doit être particulièrement symétrique » (et est donc susceptible d’être classifiable). Cette heuristique est inspirée par un résultat de Ferrand-Obata [Oba71 ; Fer96] sur les variétés Riemanniennes compactes dont le groupe de transformations conformes est non-compact. Elle est à l’origine d’un vaste programme de recherche suggéré par d’Ambra-Gromov [GD91] au sujet des structures géométriques rigides à « grand » groupe d’automorphismes, qui a suscité de nombreux travaux tout particulièrement dans le cas Lorentzien [Zeg99 ; Fra20 ; MP22 ; Dum+25].

La structure géométrique invariante par un difféomorphisme partiellement hyperbolique de contact est appelée *géométrie de chemins* [Car24 ; Tak94a]. Elle est *rigide* en un sens rendu précis par la notion de *géométrie de Cartan* [Car10 ; ČS09], ce qui permet de lui appliquer l’heuristique précédente. Ces objets géométriques sont introduits à la section 4 où deux résultats de rigidité sont présentés dans la direction du programme de d’Ambra-Gromov (théorèmes F et G), obtenus en collaboration avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso [FMV21 ; FMV24].

1.2.2. *Rigidité des dynamiques hyperboliques au delà du cas contact et en dimension supérieure (section 7).* Dans tous les travaux existant au sujet du problème de rigidité lisse des dynamiques hyperboliques, une hypothèse géométrique est toujours faite *a priori* pour assurer que le système dynamique étudié préserve bien une structure géométrique rigide (permettant d’appliquer la philosophie du programme de d’Ambra-Gromov esquissée ci-dessus). En présence d’une telle hypothèse, il est cependant difficile de savoir si le phénomène de rigidité observé est dû à la *régularité* des fibrés invariants, ou au contexte géométrique spécifique étudié. Cela motive l’étude du problème de rigidité lisse au delà d’hypothèses géométriques *a priori*. Je présente au paragraphe 7.1 deux projets dans cette direction, en collaboration avec Rafael Potrie et Karin Melnick.

La rigidité lisse des *flots Anosov de contact* a été établie en dimension quelconque par Benoist-Foulon-Labourie [BFL92] en utilisant une connexion affine invariante auxiliaire due à Kanai [Kan88]. Cette méthode est structurellement inadaptée aux difféomorphismes partiellement hyperboliques, pour lequel le bon point de vue semble être de considérer les fibrés invariants comme une structure géométrique à part entière appelée *structure Lagrangienne de contact* [Car24 ; Tak94b]. Le comportement de ces structures est drastiquement différent en dimension trois et en dimension supérieure. Ceci fait l’objet d’un programme de recherche de long terme au sujet de la rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension supérieure, dont je dégage les enjeux principaux au paragraphe 7.2.

1.3. Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (section 5).

L’un des principaux intérêts des géométries de Cartan est d’introduire la notion de *courbure* d’une géométrie de chemins. Cela motive à débiter l’étude des géométries de chemins par celles dont la courbure est nulle, qui sont les variétés de dimension trois modelées sur l’espace des drapeaux complets de $\mathbb{R}^3$ noté $\mathbf{X}$, sous l’action du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Ceci est formalisé par la notion de $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -structures, que nous appellerons *structures drapeaux* par commodité.

Ces dernières constituent l'un des plus simples exemples de structures géométriques localement homogènes en dimension trois dont l'espace homogène sous-jacent est de *rang* supérieur ou égal à deux.⁷ Ces espaces homogènes G/P « de rang supérieur » suscitent depuis une vingtaine d'année un fort intérêt à travers la famille des *représentations Anosov* de groupes discrets dans G qui leur sont associées [Lab06 ; GW12 ; Gué+17]. Les structures sous-jacentes ont au contraire été peu étudiées d'un point de vue géométrique ([Fra04 ; GW08 ; LM24 ; NR25] faisant partie des rares exemples). En comparaison de l'avancée importante du domaine du point de vue des espaces de représentations appelés *variétés des caractères*, la compréhension des phénomènes géométriques spécifiques au rang supérieur demeure ainsi très faible. Cela invite à améliorer notre connaissance de la géométrie et de la topologie des variétés de dimension trois portant une structure drapeaux. L'une des motivations est de mettre en évidence dans ce cas concret d'*espace de Teichmüller de rang supérieur* des comportements pouvant peut-être suggérer des phénomènes plus généraux.

Les travaux présentés dans la section 5 s'inscrivent dans cette démarche. L'une des premières nécessités en présence d'une nouvelle famille d'objets est de disposer d'une large source d'exemples. Pour les structures Riemanniennes conformes ou les structures CR, de nouveaux exemples sont obtenus par le recollement de deux structures préexistantes le long de leur somme connexe [Kul78 ; BS76]. Le rang supérieur à deux empêche une telle construction dans le cas des structures drapeaux, pour lesquelles nous avons mis en évidence avec Elisha Falbel un phénomène nouveau dans [FM24]. C'est dans leur cas le long de *corps-en-anses de genre deux* que deux structures peuvent être recollées (théorème H), ce qui nous permet de construire de nouvelles structures drapeaux « exotiques » *non-uniformisables* (théorème I). Dans la perspective du programme de d'Ambra-Gromov, on peut également chercher à construire des exemples de structures drapeaux dont l'on contrôle les propriétés dynamiques du *groupe d'automorphismes* [Mio22a] (théorème J).

Présentation des travaux

2. TORES DE-SITTER SINGULIERS, UNIFORMISATION ET RIGIDITÉ

La direction la plus récente de mon travail de recherche concerne une famille de structures géométriques sur les surfaces appelées *structures de-Sitter singulières* (présentées à travers des exemples au paragraphe 2.1). Une telle structure définit sur un tore un système dynamique d'origine géométrique, qui est une paire de feuilletages transverses appelés *feuilletages lumières*. Toute isométrie induit naturellement une conjugaison de ces feuilletages, et on peut réciproquement se demander si ce système dynamique détermine la géométrie. Les travaux présentés dans cette section sont en partie motivés par cette question. Son intérêt et sa difficulté principale viennent du fait que les feuilletages lumières sont seulement continus, ce qui demande de tirer des informations géométriques à partir d'une notion de dynamique topologique.

2.1. Tores de-Sitter singuliers. Une forme quadratique du plan $\mathbb{R}^2$ est dite *Lorentzienne* si elle est non-dégénérée et d'indice 1, *i.e.* linéairement conjuguée à la forme de *Minkowski*

$$(2.1) \quad q_{1,1}(x, y) = x^2 - y^2.$$

Une *métrique Lorentzienne* g sur une surface S est l'analogue d'une métrique Riemannienne en signature Lorentzienne, à savoir un champ lisse de formes quadratiques Lorentziennes sur les plans tangents à S . La spécificité d'une métrique Lorentzienne est de définir sur S deux champs de droites dits *lumières* sur lesquelles g s'annule.⁸ Ils s'intègrent en une paire de *feuilletages lumières* transverses de dimension 1 appelée *bi-feuilletage lumière*. L'existence d'un feuilletage imposant à S d'être de caractéristique d'Euler nulle selon le théorème de Poincaré-Hopf, le tore $\mathbf{T}^2$ est donc la seule surface fermée orientable et connexe supportant une métrique Lorentzienne. Un analogue à la formule de Gauss-Bonnet [Dza84] impose de plus à une telle métrique à courbure constante d'être de courbure nulle. La construction de tores Lorentziens à courbure constante *non-nulle* nécessite pour cette raison l'introduction de *singularités* concentrant toute la courbure et similaires aux singularités coniques Riemanniennes, que nous définissons maintenant.

7. Le *rang réel* de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est la dimension de son sous-groupe de matrices diagonales, qui est égale à 2.

8. Ce sont par exemple les droites d'équations $x = \pm y$ pour la forme de Minkowski (2.1). Ces champs de droites sont en général définis sur un revêtement d'indice 2 de S , mais seront bien définis sur S dans notre cas.

2.1.a. *Espace de-Sitter*. L'espace de-Sitter de dimension deux est l'ensemble

$$(2.2) \quad \mathbf{dS}^2 = (\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1) \setminus \text{diagonale où diagonale} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{RP}^1\},$$

muni de l'action transitive de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ induite par son action projective diagonale sur $(\mathbb{RP}^1)^2$. Le stabilisateur du point $\mathbf{o} = ([\frac{1}{0}], [\frac{0}{1}]) \in \mathbf{dS}^2$ est le sous-groupe diagonal $A = \{a^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, ce qui identifie $\mathbf{dS}^2$ à l'espace homogène $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/A$. Sa métrique Lorentzienne $g_{\mathbf{dS}^2} = \frac{4}{|x-y|^2} dx dy$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariante et à courbure constante égale à 1, et $(\mathbf{dS}^2, g_{\mathbf{dS}^2})$ est l'espace homogène modèle des surfaces Lorentziennes à courbure constante non-nulle. C'est en ce sens l'analogue Lorentzien du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$.⁹, et $\mathbf{dS}^2$ s'identifie d'ailleurs à l'espace des géodésiques orientées du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$ muni de son unique métrique pseudo-Riemannienne invariante par les isométries de $\mathbf{H}^2$. La géométrie de-Sitter est en ce sens duale à la géométrie hyperbolique : c'est la géométrie des géodésiques des surfaces hyperboliques. Le bi-feuilletage lumière $(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)$ de $\mathbf{dS}^2$ est induit par le bi-feuilletage produit de $(\mathbb{RP}^1)^2$ en horizontales et verticales.

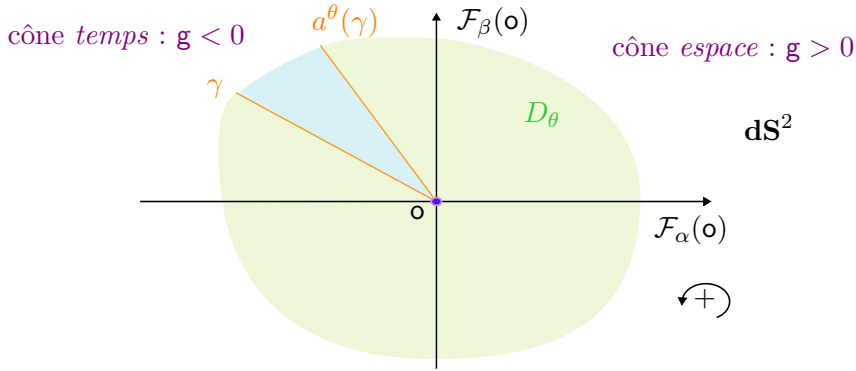


FIGURE 2.1. Singularité de-Sitter d'angle θ .

2.1.b. *Surfaces de-Sitter singulières*. De manière analogue au cas Riemannien, une singularité conique Lorentzienne est construite en choisissant une isométrie $a^\theta \in A$ non-triviale et un rayon géodésique $\gamma \subset \mathbf{dS}^2$ émanant de $\mathbf{o}$, en considérant le secteur D_θ allant de γ à $a^\theta(\gamma)$ dans $\mathbf{dS}^2$ et en recollant ses deux composantes de bord par a^θ (voir figure 2.1 ci-dessus). On obtient ainsi une surface $\mathbf{dS}_\theta^2 = D_\theta / \sim$ avec un point marqué $\mathbf{o}_\theta$ qui est la projection de $\mathbf{o}$, munie sur $\mathbf{dS}_\theta^2 \setminus \{\mathbf{o}_\theta\}$ d'une métrique Lorentzienne naturelle provenant de celle de $\mathbf{dS}^2$.

Définition 2.1. Une *structure de-Sitter singulière* sur une surface est une métrique Lorentzienne localement isométrique à $\mathbf{dS}^2$, définie en dehors d'un ensemble discret de points qui sont des *singularités standard de-Sitter* (i.e. admettent un voisinage isométrique à celui de $\mathbf{o}_\theta$ dans $\mathbf{dS}_\theta^2$).¹⁰

2.1.c. *Bi-feuilletage lumière*. On peut montrer que les feuilletages lumières d'une surface de-Sitter singulière S se prolongent aux singularités en une paire de feuilletages topologiques transverses appelée *bi-feuilletage lumière* de S . Le tore demeure donc la seule surface fermée orientable et connexe supportant une structure de-Sitter singulière. L'étude des métriques Lorentziennes sur les surfaces fermées de genre supérieur exige la considération d'autres types de singularités, et fait l'objet de projets de recherche évoqués au paragraphe 6.2.

9. L'espace de-Sitter et son analogue *anti-de-Sitter* de courbure constante -1 sont en effet anti-isométriques. À la différence du cas Riemannien, il n'y a donc qu'une géométrie Lorentzienne à courbure constante non-nulle en dimension deux (à normalisation près). La quadrique $q_{1,2}^{-1}(1)$ de l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^3, q_{1,2})$ est isométrique à $\mathbf{dS}^2$ ce qui en fournit un autre modèle, analogue au *modèle de l'hyperboloïde* de $\mathbf{H}^2$.

10. La même définition fait sens pour le plan de Minkowski $(\mathbb{R}^2, q_{1,1})$, fournissant une notion analogue de singularité en courbure nulle.

2.1.d. *Exemples : une famille à un paramètre de tores de-Sitter à une singularité.* L'exemple le plus simple de tore de-Sitter singulier est obtenu en considérant un rectangle $\mathcal{R}_\theta$ d'aire θ à bords lumières dans $\mathbf{dS}^2$, et en recollant ses côtés selon les identifications illustrées à la figure 2.2. On identifie d'abord les côtés verticaux de $\mathcal{R}_\theta$ par l'unique isométrie A envoyant côté sur côté, obtenant ainsi un cylindre de-Sitter ayant deux feuilles lumières fermées α horizontales pour composantes de bord. Le recollement isométrique de ces dernières est un *échange d'intervalle homographique par morceaux* (B_1, B_2) admettant deux degrés de liberté (x, x') . L'existence d'une unique singularité p au quotient impose cependant une relation additionnelle $x' = x'(x)$. On obtient finalement un unique paramètre x de *torsion* (« twist »), et une famille à un paramètre de tores de-Sitter $\mathcal{T}_{\theta,x}$ à une singularité p d'angle θ dont la feuille lumière α horizontale est fermée.

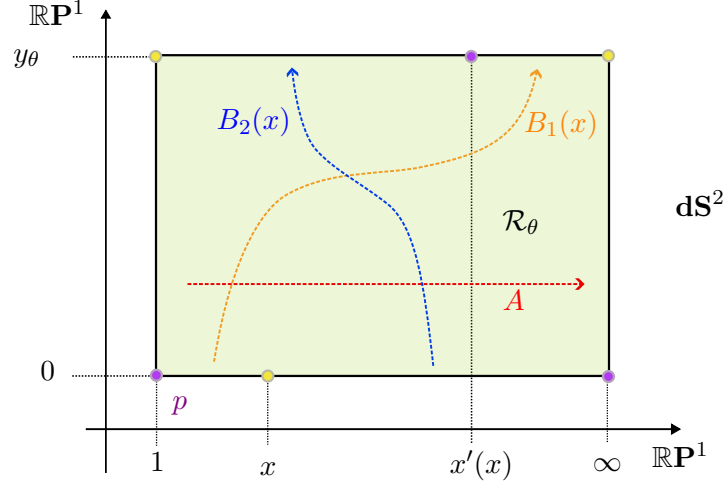


FIGURE 2.2. Tore de-Sitter $\mathcal{T}_{\theta,x}$ à une singularité de feuille lumière horizontale fermée.

2.2. Uniformisation des tores de-Sitter singuliers. Les exemples $\mathcal{T}_{\theta,x}$ du paragraphe 2.1.d montrent l'existence d'un *espace de déformation* $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$ des tores de-Sitter à une singularité d'angle θ modulo isotopies (voir [Mio24, Definition 6.1] pour plus de détails). Le paramètre de « twist » x étant toutefois peu intrinsèque, on peut se demander s'il correspond à un phénomène sous-jacent dans l'espoir d'obtenir une description plus globale de $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$. On remarque alors que le point $(x, 0)$ est le *premier retour* $R_\beta(p)$ de la singularité $p = (1, 0) \in \mathcal{T}_{\theta,x}$ sur sa feuille lumière horizontale fermée $\mathcal{F}_\alpha(p)$, le long du feuilletage vertical $\mathcal{F}_\beta$. En d'autres termes, $\mathcal{F}_\beta$ est la *suspension* du *difféomorphisme homographique par morceaux* R_β du cercle $\mathcal{F}_\alpha(p)$, et les dynamiques de R_β et $\mathcal{F}_\beta$ sont ainsi essentiellement équivalentes et contrôlées par le paramètre x .

Ceci est formalisé par les notions de *nombre de rotation* $\rho(R_\beta) \in \mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de R_β , et de *cycle asymptotique* $A(\mathcal{F}_\beta) \in \mathbb{RP}^1$ de $\mathcal{F}_\beta$ ¹¹ (qui est invariant par isotopie). Les identifications menant aux tores $\mathcal{T}_{\theta,x}$ peuvent évidemment être symétrisées pour obtenir une seconde famille à un paramètre dont la feuille *verticale* de la singularité est cette fois-ci fermée, ce qui suggère de s'intéresser aux deux feuilletages simultanément et finalement à l'application

$$(2.3) \quad \mathcal{A}: \mathbf{g} \in \text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2) \mapsto (A(\mathcal{F}_\alpha^{\mathbf{g}}), A(\mathcal{F}_\beta^{\mathbf{g}})) \in (\mathbb{RP}^1)^2 \setminus \text{diagonale}.$$

Dans le cas Riemannien, Troyanov [Tro86 ; Tro91] identifiait l'espace de déformation des métriques à singularités coniques à l'*espace de Teichmüller* de la surface topologique sous-jacente, à travers la structure complexe. Les observations faites précédemment soutiennent l'idée que l'invariant pertinent n'est plus de nature analytique dans le cas Lorentzien, mais fourni par la *dynamique topologique* du bi-feuilletage lumière à travers l'application $\mathcal{A}$. De là découle la question : *l'application $\mathcal{A}$ est-elle injective, ou surjective ?* Le nombre de rotation des homéomorphismes du cercle étant stationnaire aux rationnels, on peut montrer que $\mathcal{A}$ n'est *pas injective*. Le travail [Mio24]

11. Le cycle asymptotique $A(\mathcal{F}_\beta)$ est une « version globale » de $\rho(R_\beta)$, qui change par exemple par l'action d'un twist de Dehn autour de $\mathcal{F}_\alpha(p)$ (au contraire de $\rho(R_\beta)$). L'analogue des cycles asymptotiques pour les surfaces de genre supérieur sont les classes d'isotopie des feuilletages projectifs mesurés.

montre en revanche sa surjectivité, et son injectivité sur certains sous-espaces. J'y obtiens en particulier le résultat suivant.

Théorème A ([Mio24, Theorem B]). *Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, et $A_\alpha \neq A_\beta \in (\mathbb{RP}^1)^2$ deux droites distinctes à pentes irrationnelles. Il existe alors dans $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$ une unique classe d'isotopie $\mathbf{g}$ de structures dont les feuilletages lumières aient pour cycles asymptotiques $A(\mathcal{F}_\alpha^\mathbf{g}) = A_\alpha$ et $A(\mathcal{F}_\beta^\mathbf{g}) = A_\beta$. En particulier, $\mathcal{F}_\alpha^\mathbf{g}$ et $\mathcal{F}_\beta^\mathbf{g}$ sont des suspensions minimales (i.e. dont toutes les feuilles sont denses).*

Le théorème A paramètre la partie la plus dynamiquement riche de l'espace de déformation par un invariant de dynamique topologique. Cette identification est équivariante pour l'action du groupe modulaire du tore¹², ce qui ouvre la porte à une étude de sa dynamique sur $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$.

2.3. Rigidité différentiable des feuilletages lumière. En observant que deux métriques Lorentziennes conformes g_1 et $g_2 = \rho g_1$ partagent les même droites lumières, on remarque qu'une classe conforme Lorentzienne est équivalente à son bi-feuilletage lumière. Ceci permet de réinterpréter le théorème A comme un résultat d'uniformisation. À la différence du cas Riemannien, on notera cependant que c'est ici dans chaque « classe conforme topologique » que l'on identifie une unique métrique singulière à courbure constante. Ceci suggère une rigidité bien plus forte du cas Lorentzien, dont une nouvelle manifestation est le résultat suivant.

Théorème B ([Mio24, Theorem A]). *Soit S_1 et S_2 deux tores de-Sitter ayant une unique singularité du même angle et des bi-feuilletages lumières minimaux. Toute équivalence topologique entre les bi-feuilletages lumières de S_1 et S_2 qui envoie singularité sur singularité, est une isométrie.*

Une *équivalence topologique* est un homéomorphisme $f: S_1 \rightarrow S_2$ envoyant le bi-feuilletage lumière de S_1 sur celui de S_2 . Le théorème B montre donc incidemment que toute équivalence topologique entre deux bi-feuilletages lumières de la sorte est lisse. L'une des motivations de ce travail est d'utiliser ce résultat pour étudier le même problème de *rigidité différentiable* pour les *difféomorphismes par morceaux du cercle*. Ce projet de recherche est présenté dans la section 6.1, et la stratégie de preuve du théorème B est au passage évoquée au paragraphe 6.1.c.

2.4. Rigidité du spectre marqué des longueurs de type temps. Au même titre qu'une variété Riemannienne, il émane en tout point d'un tore de-Sitter et dans chaque direction tangente une unique courbe préférentielle appelée *géodésique*. Ces dernières ont cependant dans le cas Lorentzien différentes *signatures* selon le signe pris par la métrique. Les feuilles des deux feuilletages lumières sont précisément les géodésiques allant dans les directions des deux droites lumières, et ces dernières délimitent dans le plan tangent un *cône de type temps* (respectivement de type *espace*) où la métrique est négative (resp. positive), représenté à la figure 2.1. Les cycles asymptotiques (2.3) des feuilletages lumières sont deux droites de $\mathbb{R}^2$, et définissent donc une partition similaire du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ en *classes d'homotopies de type temps* (resp. *espace*). Je montre qu'une classe d'homotopie libre d'un tore de-Sitter singulier est de type temps, si et seulement si elle contient une géodésique fermée de type temps [Mioona], et que cette géodésique est de plus unique dans sa classe d'homotopie en présence d'une unique singularité [Mioonb]. Ce comportement, similaire à celui de la courbure négative Riemannienne, permet d'associer à un tore de-Sitter à une singularité son *spectre marqué des longueurs de type temps*, défini sur l'ensemble des classes d'homotopie de type temps par la longueur de l'unique représentant géodésique. Le résultat ci-dessous montre la *rigidité* de ce spectre marqué des longueurs de type temps, et rappelle en cela des résultats de rigidité analogues dans le cas Riemannien.

Théorème C ([Mioonb, Theorem B]). *Soit g_1 et g_2 deux structures de-Sitter de classe A ¹³ sur $\mathbf{T}^2$ ayant une unique singularité du même angle. Si g_1 et g_2 donnent les même longueurs à une paire de classes d'homotopies de type temps de nombre d'intersection un, alors g_1 et g_2 sont isotopes.*

La rigidité du spectre marqué des longueurs découle dans le cas des surfaces Riemanniennes à courbure constante négative de méthodes tout à fait spécifiques [KF96]. Il n'est à ce titre pas surprenant d'observer dans le cas de-Sitter une rigidité importante ne nécessitant que deux longueurs.

12. Qui est le groupe de ses homéomorphismes modulo isotopies.

13. I.e. dont les cycles asymptotiques sont distincts : $A(\mathcal{F}_\alpha^\mathbf{g}) \neq A(\mathcal{F}_\beta^\mathbf{g})$.

Le théorème C repose sur une décomposition *longueur-torsion* des tores de-Sitter singuliers, rappelant les *coordonnées de Fenchel-Nielsen* dans les espaces de Teichmüller classiques.¹⁴

2.5. Géométrisation de-Sitter des caractères $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ du tore troué. Le groupe fondamental d'un tore troué $\mathbf{T}^2 \setminus \{p\}$ muni d'une structure de-Sitter à une singularité en p agit par isométries sur le relevé de la structure de-Sitter au revêtement universel. Cette action est encodée par une *représentation d'holonomie* ρ , qui est un morphisme du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{T}^2 \setminus \{p\})$ (un groupe libre $\langle a, b \rangle$ à deux générateurs) vers $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbf{dS}^2)$, envoyant la courbe $aba^{-1}b^{-1}$ entourant la singularité p d'angle θ vers un élément hyperbolique conjugué à a^θ . On dit alors que la structure de-Sitter singulière *géométrise* la classe de conjugaison de ρ , et l'ensemble de ces classes forme une *variété des caractères relative* notée $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{T}^2 \setminus \{p\}, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$. Cette variété admet un ouvert géométrisé par des *pantalons hyperboliques*, et dont le complémentaire est particulièrement intéressant d'un point de vue dynamique : l'action du groupe modulaire¹² $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ de $\mathbf{T}^2 \setminus \{p\}$ y est *ergodique*¹⁵ [Gol03]. Ce complémentaire n'admettait cependant pour le moment aucune interprétation géométrique. Dans un travail en préparation avec Florestan Martin-Baillon et Maxime Wolff, nous géométrisons ces caractères par des structures de-Sitter.

Théorème D ([MMWon]). *Une représentation de $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{T}^2 \setminus \{p\}, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ est l'holonomie d'un tore de-Sitter singulier de classe A ¹³ si et seulement si elle n'est pas diédrale¹⁶.*

L'une des motivations de ce résultat de géométrisation est d'étudier la dynamique du groupe modulaire du tore sur les variétés des caractères $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ relatives à partir de sa dynamique sur $\mathrm{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$, elle-même partiellement décrite par les cycles asymptotiques (théorème A). Cette direction de recherche est discutée au paragraphe 6.2.b.

3. RIGIDITÉ DES DYNAMIQUES (PARTIELLEMENT) HYPERBOLIQUES

Le second axe de mes travaux de recherche, initié lors de ma thèse et prolongé depuis, est motivé par un phénomène reliant les *systèmes dynamiques (partiellement) hyperboliques* à la géométrie. Ces systèmes préservent par nature une *structure géométrique d'origine dynamique*. Cette dernière est en général peu régulière, mais elle est lisse pour *les plus symétriques* et les mieux compris de ces systèmes, qui sont d'origine algébrique. Lorsque la structure géométrique invariante produite par la dynamique est régulière, on peut réciproquement se demander si cela impose à la dynamique d'être particulièrement symétrique, *i.e.* conjuguée à un exemple algébrique. Les travaux présentés dans cette section s'inscrivent au sein de cette question.

3.1. Difféomorphismes partiellement hyperboliques et flots Anosov. La richesse des exemples suivants de systèmes dynamiques en dimension trois constituent une motivation importante pour la théorie des systèmes (partiellement) hyperboliques. On dira qu'une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est *hyperbolique* si toutes ses valeurs propres sont de module différent de 1, et *partiellement hyperbolique* si au moins deux de ses valeurs propres le sont.

Exemples 3.1 (Exemples algébriques en dimension trois). (1) Une matrice partiellement hyperbolique $A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ définit un *automorphisme linéaire* f_A du tore $M^3 = \mathbf{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

(2) Pour $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique, le groupe d'Heisenberg $\mathrm{Heis}(3) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ admet un unique automorphisme ϕ de différentielle $A \times \mathrm{id}$ en l'identité dans une base adaptée. Ce dernier induit sur le quotient $M^3 = \Gamma \backslash \mathrm{Heis}(3)$ par un sous-groupe discret cocompact Γ de $\mathrm{Heis}(3)$ un *automorphisme partiellement hyperbolique de nil-variété* (voir [Mio22b, §1.1] pour plus de détails).

(3) Pour $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique, la translation verticale $(x, s) \mapsto (x, s + t)$ induit sur le quotient $M^3 = \mathbf{T}^2 \times [0; 1]/\{(x, 1) \sim (f_A(x), 0)\}$ un flot (φ^t) appelé *suspension de A* .

14. Ceci explique l'apparition de *deux* longueurs, l'espace de déformation $\mathrm{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$ étant de dimension deux.

15. Cela signifie que tout ensemble mesurable invariant par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est de mesure nulle ou complémentaire d'un ensemble de mesure nulle, vis-à-vis d'une forme symplectique invariante sur $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{T}^2 \setminus \{p\}, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ [Gol97].

16. *I.e.* si elle ne factorise pas par le groupe d'isométrie d'une géodésique de $\mathbf{H}^2$.

- (4) Soit S une surface hyperbolique fermée, et $\gamma_{x,v}(t)$ la géodésique paramétrée à vitesse 1 partant d'un point $x = \gamma_{x,v}(0) \in S$ dans une direction $v = \gamma'_{x,v}(0) \in T_x^1 S$. Ceci définit sur le fibré unitaire tangent $M^3 = T^1 S$ le *flot géodésique* $\varphi^t: (x, v) \in T^1 S \mapsto \gamma'_{x,v}(t) \in T^1 S$.

Les travaux fondateurs d'Anosov [Ano69] ont montré que la propriété essentielle commune à ces quatre systèmes et qui fait la richesse de leur dynamique, est l'existence d'une décomposition du fibré tangent à M en somme de *fibrés invariants*

$$(3.1) \quad TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

tel que pour tout $x \in M$: $D_x f(E^\sigma(x)) = E^\sigma(f(x))$ pour $\sigma = s, c, u$ (et $D_x \varphi^t(E^\sigma(x)) = E^\sigma(\varphi^t(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dans le cas d'un flot). Pour les automorphismes linéaires f_A du tore $\mathbf{T}^3$ (exemple 3.1.(1)), les fibrés E^s , E^c et E^u sont les projections respectives sur $\mathbf{T}^3$ des droites propres de A dont le module des valeurs propres est respectivement strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à 1. Dynamiquement, cela signifie que E^s (respectivement E^u) est *uniformément contracté* (resp. *dilaté*) par les itérées de f , au sens où il existe un temps $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur unitaire $v^s \in E^s(x)$ (resp. $v^u \in E^u(x)$) :

$$(3.2) \quad \|D_x f^N(v^s)\| < 1 \text{ (resp. } \|D_x f^N(v^u)\| > 1)$$

avec $\|\cdot\|$ une métrique Riemannienne sur M .¹⁷ Dans le cas d'un flot $(\varphi_X^t)_{t \in \mathbb{R}}$, le troisième fibré *central* $E^c(x) = \mathbb{R}X(x)$ est simplement le champ de droites dirigé par le champ de vecteur $X(x) = \frac{d\varphi_X^t(x)}{dt}|_{t=0}$ définissant le flot. Dans le cas d'un difféomorphisme, E^c est uniformément exponentiellement moins contracté (resp. dilaté) que E^s (resp. E^u), et on dit alors que la décomposition (3.1) est *dominée*¹⁸. Ces dynamiques sont illustrées par la figure 3.1.

Définition 3.2. Un difféomorphisme f (resp. un flot $(\varphi_X^t)_{t \in \mathbb{R}}$) d'une variété M fermée est dit *partiellement hyperbolique* (resp. *Anosov*) s'il préserve une décomposition de la forme (3.1), et si :

- E^s et E^u sont uniformément contractés et dilatés au sens de (3.2),
- la décomposition est dominée (resp. $E^c(x) = \mathbb{R}X(x)$).

On renvoie par exemple à [Pot18, §1] et [Pot25] pour plus de détails.

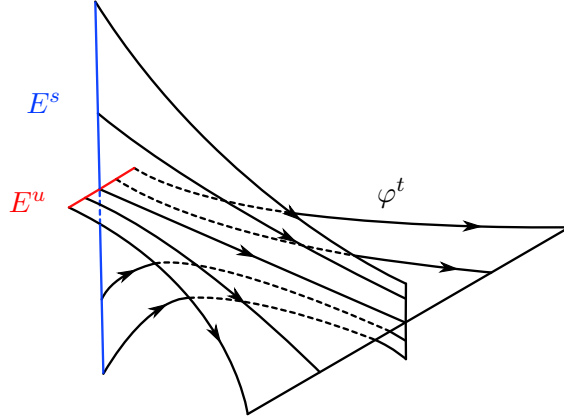


FIGURE 3.1. Structure locale d'un flot Anosov (φ^t) .

La définition 3.2 est faite pour généraliser les exemples algébriques 3.1 : les automorphismes des tores (1) et des nil-variétés (2) sont des difféomorphismes partiellement hyperboliques, tandis que les suspensions (3) et les flots géodésiques de surfaces hyperboliques (4) sont des flots Anosov. La définition 3.2 est par ailleurs motivée par le fait que les systèmes considérés forment un *ouvert* : toute déformation d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique (respectivement d'un flot Anosov) qui est assez petite en topologie $\mathcal{C}^1$ demeure partiellement hyperbolique (resp. Anosov). Il existe de plus de nombreux exemples de flots Anosov et de difféomorphismes partiellement

17. Notons que ces propriétés sont indépendantes de la métrique choisie puisque M est compacte.

18. Cette notion ne jouant aucun rôle dans les résultats présentés dans ce texte, nous ne nous y attardons pas.

hyperboliques *non-algébriques* en dimension trois (voir par exemple [Pot18, §3]). Notons enfin que le temps un d'un flot Anosov est un difféomorphisme partiellement hyperbolique. Les flots Anosov fournissent ainsi des cas particuliers de difféomorphismes partiellement hyperboliques dont la dynamique est singulièrement rigide (par exemple, ils sont isotopes à l'identité).

3.2. Régularité des fibrés invariants et rigidité des flots Anosov de contact. La notion d'hyperbolicité (partielle) mettant en avant l'existence d'une *structure géométrique invariante par la dynamique*, il est naturel de s'intéresser aux propriétés de cette structure, et pour commencer à sa *régularité*. On peut montrer que la définition 3.2 rend les fibrés invariants $E^{s/c/u}$ automatiquement *continus*, dû à leur origine dynamique. Ces derniers sont par ailleurs *lisses* (i.e. de classe C^∞) pour les exemples algébriques 3.1. Il est cependant connu depuis Anosov [Ano69, Chapter 24] que les fibrés invariants d'une petite déformation d'un exemple algébrique ne sont plus lisses, ce qui a des conséquences dynamiques drastiques (par exemple sur la *théorie ergodique* de ces systèmes). Il est pour cette raison important de comprendre si les systèmes algébriques sont « les seuls dont les fibrés invariants sont lisses », ce qui se formule plus précisément ainsi.

Question 3.3. Les systèmes dynamiques (partiellement) hyperboliques dont les fibrés invariants sont lisses sont-ils conjugués¹⁹ par une application lisse à des exemples algébriques ?

Cette question a suscité un fort intérêt, de nombreux travaux [Ghy87 ; Kan88 ; HK90 ; BFL92 ; BL93 ; Fan05] y apportant des réponses positives partielles mais ce *exclusivement pour les flots ou difféomorphismes Anosov*.²⁰ L'apparition de nouvelles méthodes (entre autres d'analyse micro-locale) a récemment suscité un regain d'intérêt pour des questions de rigidité similaires [Mit24 ; Bea25], de nouveau concernant certains flots Anosov (les flots géodésiques de variétés localement symétriques à courbure strictement négative). Nous nous concentrerons sur un résultat dû à Ghys.

Théorème 3.4 ([Ghy87]). Soit (φ^t) un flot Anosov d'une variété fermée de dimension trois dont les distributions stable et instable sont lisses. Alors à revêtement fini près, (φ^t) est :

- (1) soit C^∞ -orbitalement équivalent²¹ au flot géodésique d'une surface hyperbolique fermée ;
- (2) soit C^∞ -conjugué à la suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore.

La dichotomie mise en avant par cet énoncé est une occasion d'observer les fibrés invariants $E^{s/u}$ des exemples algébriques 3.1 de dimension trois sous un œil nouveau : celui de la *géométrie locale* de leur somme $E^s \oplus E^u$. Le champ de plans $E^s \oplus E^u$ est *intégrable* dans le cas de la suspension d'un automorphisme hyperbolique de $\mathbf{T}^2$, i.e. tangent à un *feuilletage*. À l'inverse, $E^s \oplus E^u$ est une *structure de contact* dans le cas du flot géodésique d'une surface hyperbolique ou pour un automorphisme partiellement hyperbolique de nil-variété.

Définition 3.5. Une *structure de contact* sur une variété M de dimension $2n + 1$ est un champ d'hyperplans lisse H qui n'est intégrable sur aucun ouvert non-vide. Plus précisément, H est localement le noyau d'une 1-forme de contact θ , i.e. telle que $\theta \wedge (d\theta)^n$ ne s'annule pas.

On renvoie par exemple à [Gei06] pour plus de détails. La dichotomie du théorème 3.4 repose sur un fait hautement *spécifique aux flots Anosov en dimension trois*, qui est une conséquence d'un théorème dû à Livšic : dans leur cas, $E^s \oplus E^u$ est soit intégrable, soit contact [HK90, Theorem 2.3]. Des résultats de Plante [Pla72] montrant la conjugaison à une suspension dans le premier cas, le résultat de Ghys se ramène *in fine* à montrer la rigidité dans le cas des *flots Anosov de contact*, i.e. lorsque $E^s \oplus E^u$ est de contact. Ce dernier résultat a été généralisé en dimension quelconque dans [BFL92].

19. Deux applications $f: M \rightarrow M$ et $g: N \rightarrow N$ sont *conjuguées par* $\varphi: M \rightarrow N$ si $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

20. Cette question est liée à d'autres problèmes de rigidité reliant la géométrie des variétés localement symétriques à courbure strictement négative à la dynamique de leur flot géodésique (voir par exemple l'introduction de [BCG95]).

21. Une orbite-équivalence est un difféomorphisme envoyant les orbites du premier flot sur celles du second (le paramétrage des orbites par le flot n'étant pas forcément préservé).

3.3. Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact. La question de rigidité 3.3 a été essentiellement laissée de côté après l'avancée majeure fournie par le travail [BFL92] de Benoist-Foulon-Labourie, et ce malgré (au moins) deux axes de recherche complètement ouverts à son sujet. Le premier consiste à étudier cette question sans hypothèse géométrique *a priori* (de type structure de contact) sur la somme $E^s \oplus E^u$. J'évoque deux projets de recherche à ce sujet au paragraphe 7.1. Le second axe consiste à étudier la question 3.3 pour les *difféomorphismes partiellement hyperboliques*. Cette question n'a longtemps fait l'objet d'aucuns travaux jusqu'à [CPR20 ; AM24], qui en étudient le cas particulier des difféomorphismes de différentielle constante dans un repère adapté. Le résultat ci-dessous fournit une première réponse positive à la question 3.3 (en l'absence d'une hypothèse de rigidité dynamique *a priori*).

Théorème E ([Mio22b, Theorem A]). *Soit f un difféomorphisme partiellement hyperbolique²² d'une variété fermée et connexe de dimension trois dont tous les points sont non-errant²³. Supposons que les fibrés invariants E^s , E^c et E^u de f sont lisses et que $E^s \oplus E^u$ est une structure de contact. Alors modulo revêtements et itérées finis, f est C^∞ -conjugué à l'un des exemples suivants :*

- (1) *le temps un d'un flot Anosov de contact algébrique,*
- (2) *ou un automorphisme affine partiellement hyperbolique de nil-variété.*

Notons qu'un flot Anosov de contact préserve toujours la forme de contact θ dite *canonique* de noyau $E^s \oplus E^u$ et telle que $\theta(X) \equiv 1$ (avec X le générateur du flot). Il préserve ainsi également le volume $\theta \wedge d\theta$. À l'inverse, un difféomorphisme partiellement hyperbolique dont la somme $E^s \oplus E^u$ est une structure de contact n'a *a priori* aucune raison de préserver ni une forme de contact, ni un volume. Cette première manifestation de la flexibilité induite par le passage d'un flot Anosov à un difféomorphisme partiellement hyperbolique explique l'apparition de l'hypothèse sur les *points non-errants*²³ dans l'énoncé du théorème E. L'existence d'un volume préservé impose en effet à tous les points d'être non-errants, et cette dernière propriété est donc automatique dans le cas d'un flot Anosov de contact. Une distinction plus géométrique entre le cas d'un flot Anosov et celui d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique est mise en avant au paragraphe 4.2.a, où la stratégie générale de preuve du théorème E est expliquée.

Si la question 3.3 n'a longtemps fait l'objet d'aucun travail pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques, c'est peut-être en partie dû à l'absence de méthodes adaptées. Celles des travaux précédents sont en effet spécifiques aux dynamiques hyperboliques et inopérantes dans le cas partiellement hyperbolique. Les travaux antérieurs s'appuient sur une *connexion affine invariante* due à Kanai [Kan88] provenant de la forme de contact canonique d'un flot Anosov de contact, et l'absence d'une telle forme de contact invariante *a priori* pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques rend cette méthode inadaptée à leur étude. Le théorème E repose sur l'introduction d'une nouvelle méthode qui utilise la notion de *géométrie de Cartan* présentée au paragraphe 4.1.c. Cette notion généralise celle de connexion affine et permet d'étudier les fibrés invariants (E^s, E^c, E^u) de la dynamique comme une structure géométrique à part entière, évitant ainsi toute perte d'information. Ce nouveau point de vue permet par ailleurs l'étude de la question 3.3 en dimension supérieure à trois, ce qui fait l'objet d'un projet de recherche introduit au paragraphe 7.2.

4. RIGIDITÉ DES GÉOMÉTRIES DE CHEMINS ET GÉOMÉTRIES DE CARTAN

Le théorème E repose sur des objets et méthodes géométriques présentés au paragraphe 4.1. Ce résultat provient en effet d'un phénomène de rigidité géométrique dont l'explication informelle est la suivante.

Heuristique 4.1. Le triplet de champs de droites $\mathcal{S} = (E^s, E^c, E^u)$ préservé par le difféomorphisme f du théorème E est une structure géométrique rigide. L'existence d'un automorphisme f de $\mathcal{S}$

22. Le résultat reste en réalité valide sans supposer la décomposition dominée, voir [Mio22b, Corollary 8.2].

23. Un point $x \in M$ est *non-errant* s'il existe une suite d'entiers $k_n \rightarrow +\infty$ et une suite de points $x_n \in M$ convergeant vers x , tel que $f^{k_n}(x_n)$ converge vers x .

dont la dynamique est « riche » est si exceptionnelle, qu'elle impose à la structure géométrique $\mathcal{S}$ d'être particulièrement symétrique et donc classifiable.²⁴

L'heuristique 4.1 est l'avatar d'une conjecture de rigidité générale de d'Ambra-Gromov [GD91] vis-à-vis des structures géométriques à « grand » groupe d'automorphismes. J'introduis cette conjecture au paragraphe 4.2 et présente deux travaux dans sa direction.

4.1. Géométries de chemins, géométries de Cartan et structures drapeaux. Bien que « moins précise » que le triplet (E^s, E^c, E^u) , la paire de champs de droites (E^s, E^u) apparaissant dans le théorème E est suffisamment rigide pour une première approche et nous nous restreindrons donc ici à cette famille de structures.

Définition 4.2. Une *géométrie de chemins* est une paire $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de champs de droites lisses et transverses sur une variété de dimension trois, telle que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une structure de contact (voir définition 3.5).

La paire (E^s, E^u) de champ de droites préservée par un difféomorphisme f apparaissant dans le théorème E est un exemple de géométrie de chemins. L'étude des géométries de chemins remonte à Élie Cartan dans [Car24]. Elles sont parfois également appelées *structures Lagrangiennes de contact* d'après [Tak94a]. On renvoie à [ČS09, §4.2.3 p.408] pour plus de contexte, et à [Mio20, Chapitre 1] pour divers exemples.

La *rigidité* des géométries de chemins tient d'abord à l'existence d'*invariants locaux*. Cela peut surprendre lorsque l'on sait que toutes les structures de contact sont localement équivalentes d'après un théorème de Darboux. On peut même montrer que tous les couples (E^α, H) avec E^α un champ de droites lisse contenu dans une structure de contact H de dimension trois, sont localement équivalents [Mio20, Lemme 1.1.13]. À l'inverse, l'ajout d'un second champ de droites E^β rend la paire $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ *rigide* au sens suivant : il existe des géométries de chemins qui ne sont pas localement équivalentes. Les variétés Riemanniennes (M, g) sont les exemples les plus classiques de structures géométriques qui soient rigides en ce sens. Les invariants locaux sont dans leur cas fournis par la *courbure* de g , qui s'annule précisément si (M, g) est localement isométrique à l'*espace homogène modèle* des variétés Riemanniennes, qui est l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$.

Nous introduisons dans ce paragraphe la notion de *géométrie de Cartan* [Car10], qui conjugue les points de vue de Klein (espaces homogènes et (G, X) -structures) et de Riemann (métriques Riemanniennes) sur la géométrie [Sha97, Preface] et fournit des analogues pertinents aux notions d'espace Euclidien et de courbure Riemannienne dans le cas des géométries de chemins.

4.1.a. Espace des drapeaux. En notant $\mathbb{RP}^2$ l'espace des droites de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{RP}_*^2$ l'espace des plans de $\mathbb{R}^3$ (i.e. des droites projectives de $\mathbb{RP}^2$), l'*espace des drapeaux* est l'ensemble

$$\mathbf{X} = \{(p, D) \mid p \in D\} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}_*^2$$

des droites projectives pointées de $\mathbb{RP}^2$. Les fibres des deux projections $\pi_\alpha: (p, D) \in \mathbf{X} \rightarrow p \in \mathbb{RP}^2$ et $\pi_\beta: (p, D) \in \mathbf{X} \rightarrow D \in \mathbb{RP}_*^2$ définissent deux feuilletages en cercles $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\beta$ sur $\mathbf{X}$. On peut vérifier que la somme des champs de droites TC_α et TC_β tangents à ces derniers est une structure de contact, i.e. que $\mathcal{L}_\mathbf{X} = (\mathrm{TC}_\alpha, \mathrm{TC}_\beta)$ est une géométrie de chemins. L'espace des drapeaux $\mathbf{X}$ admet une action transitive du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ qui induit une identification de $\mathbf{X}$ avec l'*espace homogène* $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{\min}$, avec $\mathbf{P}_{\min} \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Cette action préserve la géométrie de chemins $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ de $\mathbf{X}$, dont $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est exactement le groupe d'automorphismes.

4.1.b. Structures drapeaux. Une fois l'*espace homogène modèle* $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_\mathbf{X})$ connu, la première étape de généralisation est de considérer les géométries de chemins $(M, \mathcal{L})$ *localement modelées sur* $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_\mathbf{X})$, i.e. admettant un atlas de cartes constituées d'isomorphismes locaux de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}_\mathbf{X}$. Tout changement de carte d'un tel atlas est un automorphisme local de $\mathbf{X}$, et on peut montrer que tout automorphisme local de $\mathbf{X}$ est la restriction de l'action d'un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ [Mio20, Théorème 4.1.8]. Réciproquement, un atlas à valeurs dans $\mathbf{X}$ dont les changements de cartes sont

24. La connaissance géométrique précise de $\mathcal{S}$ permet en retour la classification dynamique de f . Si l'on connaît assez bien une structure géométrique, on s'attend en effet à connaître tout aussi bien ses automorphismes.

dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ définit naturellement une unique géométrie de chemins $\mathcal{L}$ (celle pour laquelle les cartes de l’atlas sont des isomorphismes locaux de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$). Un tel atlas maximal est appelé $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -*structure*, ce que nous appellerons *structure drapeaux* par la suite. Sur une variété M de dimension trois, la donnée d’une structure drapeaux et celle d’une géométrie de chemins localement isomorphe à $\mathbf{X}$ sont donc équivalentes. Les variétés Riemanniennes à courbure nulle peuvent être décrites de la même manière comme $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n), \mathbb{R}^n)$ -structures [Thu97].

4.1.c. *Géométries de Cartan et courbure.* Tandis qu’une métrique Riemannienne à courbure nulle est *localement* modelée sur l’espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, une métrique Riemannienne est en général « infinitésimalement modelée » sur $\mathbb{R}^n$ au sens où la forme quadratique Euclidienne varie d’un espace tangent à l’autre. Inspirée du cas Riemannien, la notion de géométrie de Cartan permet de généraliser à tout espace homogène $X = G/P$ ce passage des structures géométriques localement modelées sur X appelées (G, X) -structures, à celles infinitésimalement modelées sur X qui sont appelées *géométries de Cartan modelées sur X* . On renvoie à [Sha97 ; Mio20, §3.1] pour plus de détails. Les *géométries de Cartan modelées sur l’espace des drapeaux* $\mathbf{X} \equiv \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{\min}$ correspondent exactement à l’ensemble des géométries de chemins [ČS09 ; Mio20, Chapitre 4]. Le cadre des géométries de Cartan a l’avantage de définir la notion de *courbure* d’une géométrie de chemins, jouant un rôle analogue à celle de courbure Riemannienne. La courbure d’une géométrie de chemin s’annule en effet précisément lorsqu’elle est localement isomorphe à $\mathbf{X}$, *i.e.* correspond à une structure drapeaux. Elle est alors dite *plate*.

4.2. **Programme de d’Ambra-Gromov pour les géométries de chemins.** Mettons maintenant l’heuristique 4.1 à l’épreuve de l’exemple le plus classique de structure géométrique rigide : les variétés Riemanniennes compactes. Ces dernières ont un groupe d’isométrie *compact* selon un théorème de Myers-Steenrod, et le groupe engendré par toute isométrie f est donc relativement compact. Or la non-compactité du groupe engendré par f est le sens minimal que l’on puisse donner au fait que « f a une dynamique riche ». Il nous faut donc considérer une structure géométrique moins rigide pour évaluer la pertinence de l’heuristique 4.1 : la *classe conforme* d’une métrique Riemannienne g .²⁵ Les sphères rondes $\mathbf{S}^n$ admettent un *groupe de transformations conformes* non-compact. Un théorème de Ferrand-Obata [Oba71 ; Fer96] affirme que ce sont les seules variétés Riemanniennes fermées de la sorte.

D’Ambra et Gromov [GD91] suggèrent de voir le résultat de Ferrand-Obata comme la manifestation d’un phénomène plus général : *la coïncidence de la compacité de la variété et de la non-compactité du groupe d’automorphismes d’une structure géométrique rigide devrait être assez rare pour permettre une classification* (*i.e.* un résultat du type de celui de Ferrand-Obata). Cette idée est proche de conjectures dûes à Zimmer [Zim87] qui furent originellement formulées pour des actions préservant des structures géométriques (avant de se concentrer sur les actions différentiables de réseaux en rang supérieur, menant récemment à des avancées majeures [Can19]). Divers travaux ont utilisé les géométries de Cartan pour étudier ce *programme de d’Ambra-Gromov*, particulièrement concernant les variétés Lorentziennes (conformes) [Zeg99 ; Fra20 ; MP22 ; Dum+25].

4.2.a. *Retour sur le théorème E.* La preuve du théorème E repose sur l’heuristique 4.1 qui est un avatar du programme de d’Ambra-Gromov pour la structure $\mathcal{S} = (E^s, E^u, E^c)$. Cette structure est une géométrie de chemins (E^s, E^u) enrichie par un troisième champ de droites transverse E^c . L’objectif est de montrer que $\mathcal{S}$ est particulièrement symétrique *i.e.* que son groupe d’automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ est « grand », à partir de l’existence d’un *unique* automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ ayant une dynamique particulièrement riche.

Ce point de vue permet de souligner une différence fondamentale entre le cas d’un flot Anosov (φ^t) (traité par le théorème 3.4) et celui d’un difféomorphisme partiellement hyperbolique f (traité par le théorème E). Dans le premier cas, (φ^t) est un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ qui est donc automatiquement de dimension non-nulle. Dans le second cas, f ne fournit qu’une copie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$. Ce dernier pourrait donc *a priori* être discret, et l’on veut au contraire montrer que $\mathcal{S}$ admet un groupe d’automorphismes de dimension positive (au revêtement universel).

25. C’est à dire l’ensemble des métriques ρg avec ρ une fonction lisse strictement positive.

4.2.b. *Programme de d’Ambra-Gromov pour les géométries de chemins strictes.* Nous verrons au théorème J une famille d’exemples « exotiques » de géométries de chemins à courbure nulle (*i.e.* de structures drapeaux), qui rendent peu probable une réponse générale au programme de d’Ambra-Gromov dans leur cas. Considérons la structure géométrique plus rigide $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ appelée *géométrie de chemins stricte*, définie par une géométrie de chemins (E^α, E^β) associée à une forme de contact lisse θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$.

Tout flot Anosov de contact à fibrés invariants lisses préserve une géométrie de chemins stricte selon la discussion suivant le théorème E. Avec X_θ le *champ de Reeb* de θ ²⁶, on notera qu’une géométrie de chemins stricte définit un triplet de champs de droites $\mathcal{S}_\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \mathbb{R}X_\theta)$ semblable à la structure préservée par les difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact considérés au théorème E. Ces derniers ne préservent donc *a priori* pas une géométrie de chemins stricte, mais *seulement une « classe conforme » de géométries de chemins strictes*. Le résultat ci-dessous, obtenu en collaboration avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso, complète le programme de d’Ambra-Gromov pour les géométries de chemins strictes.

Théorème F ([FMV21, Theorem 1.1]). *Soit $\mathcal{T}$ une géométrie de chemins stricte sur une variété fermée M de dimension trois, dont le groupe d’automorphismes est non-compact. Alors $(M, \mathcal{T})$ est isomorphe à l’un des exemples apparaissant dans le théorème E.*²⁷

Le théorème F explique incidemment le phénomène sous-jacent au théorème 3.4 de Ghys [Ghy87]. Ce dernier constitue en effet un cas très particulier du théorème F, où le groupe d’automorphismes de $\mathcal{T}$ est supposé contenir un flot Anosov.

4.2.c. *Géométries de chemins non-plates à symétries maximales.* Nous nous sommes pour le moment intéressés aux géométries de chemin admettant un groupe d’automorphismes qui est « large » d’un point de vue dynamique, *i.e.* non-compact. On peut également s’intéresser aux géométries de chemin admettant un grand groupe d’automorphismes en termes de dimension. C’est d’un point de vue local que cette question fait sens en considérant l’algèbre de Lie $\mathfrak{kill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L})$ des *champs de Killing* locaux, qui sont les champs de vecteurs définis au voisinage d’un point x et dont le flot préserve la géométrie de chemins $\mathcal{L}$.

Selon un résultat de Tresse [Tre96b], $\dim \mathfrak{kill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L}) \leq 3$ pour les géométries de chemins non-plates. Lorsque $\mathcal{L}$ est localement isomorphe à une géométrie de chemins G -invariante sur un groupe de Lie G , le cas d’égalité $\dim \mathfrak{kill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L}) = 3$ est réalisé. Nous avons réciproquement montré avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso que cette dimension maximale force une géométrie de chemins non-plate à être localement homogène.²⁸

Théorème G ([FMV24, Corollary 1.2]). *En un point où $\dim \mathfrak{kill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L}) \geq 3$, une géométrie de chemins de dimension trois dont la courbure ne s’annule pas est localement isomorphe à une géométrie de chemin invariante à gauche sur un groupe de Lie de dimension trois.*

5. GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DES STRUCTURES DRAPEAUX EN DIMENSION TROIS

La notion de géométrie de Cartan permet d’interpréter les géométries de chemins à courbure nulle comme les $(\text{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -structures, que nous appellerons désormais *structure drapeaux*. Ce sont les variétés de dimension trois localement modelées sur l’espace des drapeaux complets de $\mathbb{R}^3$ noté $\mathbf{X}$, sous l’action du groupe $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ (voir paragraphe 4.1.b). L’étude de ces structures est un préalable nécessaire à celle des géométries de chemins, par exemple dans la perspective du programme de d’Ambra-Gromov. Nous présentons au paragraphe 5.2 un résultat dans cette direction. La compréhension des structures drapeaux est bien moins avancée que celle des représentations à valeurs dans $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ qui leur sont associées. Alors que l’on sait qu’il n’existe aucune *représentation Anosov* d’un groupe fondamental de variété hyperbolique fermée de dimension trois dans $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ [CT20 ; Dey25], la question suivante demeure par exemple complètement ouverte.

26. C’est à dire l’unique champ de vecteurs X_θ tel que $\theta(X_\theta) \equiv 1$, et qui engendre le noyau de $d\theta : d\theta(X_\theta, \cdot) \equiv 0$.

27. La version publiée de ce résultat fait l’hypothèse de l’existence d’une orbite dense de ce groupe, mais une révision apportée à la version pré-publiée sur arXiv montre que cette hypothèse est en réalité superflue.

28. Les champs de Killing d’une telle géométrie ne s’annulent donc en aucun point, ce qui pourrait *a priori* arriver.

Question 5.1. Existe-t-il une structure drapeaux sur une variété hyperbolique fermée de dimension trois ?

La question 5.1 constitue une motivation intéressante car elle demande précisément si une même topologie peut porter à la fois une géométrie de rang un (une métrique hyperbolique) et une géométrie de rang deux (une structure drapeaux). Avant d'être en mesure d'aborder cette question, la première nécessité est de constituer une large source d'exemples de structures drapeaux, ce qui est l'objet des travaux présentés au paragraphe 5.1.

5.1. Structures drapeaux exotiques en dimension trois. Jusqu'à récemment, tous les exemples connus de structures drapeaux fermées étaient *Kleiniens*, *i.e.* de la forme $\Gamma \backslash \Omega$ avec $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret agissant proprement discontinûment sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}$. On notera que toutes les structures sont Kleiniennes dans le cas plus classique des variétés hyperboliques fermées, dû au fait que toute métrique Riemannienne sur une variété compacte est complète. Les structures non-Kleiniennes peuvent en ce sens être vues comme des exemples *exotiques*, et la question de leur existence est ainsi un bon indicateur de la complexité des structures étudiées. Des exemples non-Kleiniens de structures Riemanniennes conformément plates et de structures CR sont par exemple construits dans [KP86 ; Fal92].

Les *sous-groupes Anosov* de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sont en un sens orthogonaux à cette question, en cela qu'ils sont précisément pensés pour induire des exemples de structures drapeaux Kleiniennes [Bar10 ; GW12]. L'étude des représentations fournit une unique méthode générale pour construire de nouvelles structures à partir d'anciennes : le *principe d'Ehresman-Thurston*, affirmant que tout morphisme assez proche du morphisme d'holonomie²⁹ d'une structure drapeaux sur une variété fermée M , demeure le morphisme d'holonomie d'une structure drapeaux sur M . Les représentations Anosov formant un ouvert de l'espace des représentations, ce principe ne permet cependant pas de sortir de la classe des exemples Kleiniens provenant des sous-groupes Anosov. Le résultat ci-dessous, obtenu avec Elisha Falbel, fournit une méthode générale de construction de structures drapeaux obtenues en recollant deux structures pré-existantes.

Théorème H ([FM24, Theorem A]). *Soient M et N deux variétés de dimension trois munies de structures drapeaux, et $K_M \subset M$, $K_N \subset N$ deux corps-en-anses de genre deux géométriques³⁰. Il existe alors une structure drapeaux sur le recollement de M et N au dessus de K_M et K_N .*

Dans le cas des structures Riemanniennes conformément plates ou des structures CR, il est possible de recoller deux structures sur la *somme connexe* des variétés qui les portent [Kul78 ; BS76]. Dans le cas d'une structure drapeaux, la spécificité du rang supérieur apparaît : les points attractifs et répulsifs de la dynamique Nord-Sud sont en effet remplacés par des *bouquets de cercles*, et le recollement est fait le long de voisinages de ces derniers qui sont des *corps-en-anses géométriques de genre deux*. Le théorème H nous permet entre autres de montrer l'existence de nombreuses structures drapeaux non-Kleiniennes.

Théorème I ([FM24, Theorem D]). *Soit M une variété fermée de dimension trois munie d'une structure drapeaux. Si M contient un bouquet de cercles géométriques³⁰ et si son groupe d'holonomie contient un élément loxodromique, alors il existe une variété fermée de dimension trois munie d'une structure drapeaux non-Kleinienne dans laquelle $M \setminus B_M$ se plonge.*

5.2. Compactifications géométriques de flots géodésiques. Un second objectif dans la direction du programme de d'Ambra-Gromov (voir paragraphe 4.2), est d'explorer la diversité possible des structures drapeaux admettant un groupe d'automorphismes non-compact ainsi que les caractéristiques de ces derniers. On peut par exemple remarquer que tous les exemples rencontrés jusqu'ici d'automorphismes de géométries de chemins (E^α, E^β) sont en réalité plus restrictifs : ils préservent également un champ de droites transverse à $E^\alpha \oplus E^\beta$, et même une forme de contact θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$ (voir paragraphe 4.2.b et théorème F). S'il en était de même pour tout automorphisme de géométrie de chemins, cela signifierait qu'il n'y a aucune différence dynamique

29. À toute structure drapeaux sur une variété M est associée son *morphisme d'holonomie* $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. L'image du morphisme d'holonomie d'une structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$ est par exemple le sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

30. *I.e.* isomorphes au voisinage d'un bouquet de cercle $B = \mathcal{C}_\alpha(x) \cup \mathcal{C}_\beta(x)$ de l'espace des drapeaux $\mathbf{X}$, avec $\mathcal{C}_{\alpha/\beta}$ les feuilletages en cercles de $\mathbf{X}$ définis au paragraphe 4.1.a. Voir [FM24, Theorem A] pour plus de détails.

entre l'étude des géométries de chemins et celle des géométries de chemins strictes. Une obstruction à préserver une forme de contact est par exemple d'être *non-conservatif*, *i.e.* de ne préserver aucune forme volume. On peut également se demander s'il existe des automorphismes de géométries de chemins *essentiels*,³¹ *i.e.* ne préservant aucun champ de droites transverse à la structure de contact.

Le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$ à toute surface hyperbolique complète Σ admet une géométrie de chemins $\mathcal{L}_\Sigma = (E^s, E^u)$ invariante par le flot géodésique, qui est donnée par les fibrés stable et instable dans le cas compact. Le résultat ci-dessous s'intéresse à des surfaces non-compactes Σ , et fournit des exemples d'automorphismes « exotiques » de géométries de chemins en construisant une compactification géométrique de la structure $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$.

Théorème J ([Mio22a, Theorem A]). *Soient $g_1, \dots, g_d \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des éléments hyperboliques de points fixes deux à deux distincts, et $\Sigma = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}^2$ la surface hyperbolique obtenue comme quotient par le groupe de Schottky $\Gamma_0 = \langle g_1, \dots, g_d \rangle$. Alors quitte à remplacer chaque g_i par un itéré $g_i^{r_i}$:*

- (1) *$(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$ admet une compactification $(M, \mathcal{L})$ qui est une structure drapeaux ;*
- (2) *de plus, le flot géodésique de $T^1\Sigma$ s'étend sur M en un flot d'automorphismes de $\mathcal{L}$ non-conservatif, essentiel, et non-relativement compact.*

Le théorème J montre la grande variété des géométries de chemins compactes à groupe d'automorphisme non-compact, ce qui suggère qu'une réponse générale au programme de d'Ambrose-Gromov est peu probable pour ces dernières (et ce même dans le cas de la courbure nulle *i.e.* des structures drapeaux).

L'existence de la compactification $(M, \mathcal{L})$ repose sur celle d'un ouvert Ω_Γ de l'espace des drapeaux admettant une action propre et cocompacte du groupe d'holonomie $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ de la structure drapeaux $\mathcal{L}_\Sigma$. Si l'existence de cet ouvert peut être obtenue par des résultats généraux sur les représentations Anosov [GW12 ; KLP18], je décris dans [Mio22a] un *domaine fondamental* de l'action de Γ sur Ω_Γ dans le cas d'un *groupe de Schottky*.

Programme de recherche

6. SURFACES LORENTZIENNES SINGULIÈRES ET INTERACTIONS DYNAMIQUES

Le premier axe principal de mon programme de recherche concerne l'étude des surfaces Lorentziennes singulières dans différentes directions, et en lien avec diverses questions dynamiques.

6.1. Rigidité des feuilletages lumières et des difféomorphismes par morceaux du cercle.

Les *feuilletages lumières* des tores de-Sitter singuliers présentés à la section 2 (voir figure 2.2) sont les suspensions de *difféomorphismes par morceaux du cercle*. Ces derniers sont *topologiquement* conjugués³² à des rotations du cercle $x \in \mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x + \theta \in \mathbb{S}^1$ lorsqu'ils sont minimaux [Den32]. Cette conjugaison est *lisse* pour des difféomorphismes du cercle génériques [Arn64 ; Her79 ; Yoc84b], et on parle alors de *rigidité différentiable*. La rigidité différentiable des difféomorphismes *par morceaux* du cercle n'est au contraire connue que pour une unique singularité [KKM17]. Mon premier travail [Mio24] sur les tores de-Sitter singuliers a pour corollaire un résultat de rigidité géométrique de leurs bi-feuilletages lumières (théorème B). L'une des motivations de ce travail est de traduire le problème dynamique de rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle en un problème de nature géométrique. Ceci est à l'origine d'un programme de recherche de long terme en collaboration avec Selim Ghazouani et Konstantin Khanin, dont je présente les principaux enjeux dans ce paragraphe.

6.1.a. *Rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle et renormalisation.* La notion centrale reliant les difféomorphismes par morceaux du cercle à la géométrie de-Sitter est

31. Par analogie avec les *transformations conformes essentielles* d'une structure pseudo-Riemannienne conforme qui ne préservent aucune métrique de la classe conforme (voir [Fra05] au sujet du cas Lorentzien).

32. Deux applications $f: M \rightarrow M$ et $g: N \rightarrow N$ sont *conjuguées* par $\varphi: M \rightarrow N$ si $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

celle de *renormalisation* d'un homéomorphisme du cercle³³. Les renormalisations itérées des difféomorphismes par morceaux du cercle convergent vers l'espace des difféomorphismes homographiques par morceaux [KV91], et leur rigidité différentiable est généralement équivalente à la nature *exponentielle* de cette convergence [KKM17]. Cette convergence exponentielle repose elle-même principalement sur l'*hyperbolicité* de l'opérateur de renormalisation restreint aux difféomorphismes homographiques par morceaux [KK03 ; KK14]. Ceci ramène finalement le problème de rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle à une étude des renormalisations de difféomorphismes *homographiques par morceaux*, *i.e.* dont chaque branche est la restriction de l'action d'un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{RP}^1$.

6.1.b. *Renormalisation et rigidité géométrique des bi-feuilletages lumières.* Les applications de premiers retours sur des sections transverses des feuilletages lumières de tores de-Sitter singuliers sont précisément de tels difféomorphismes homographiques par morceaux. De plus, *après action par un difféomorphisme Anosov, l'application de premier retour des feuilletages lumières est la renormalisation du premier retour du feuilletage initial.* Cette observation traduit la dynamique de l'opérateur de renormalisation sur un « espace de modules dynamique » par la dynamique du groupe modulaire sur l'espace de déformation des tores de-Sitter singuliers. À l'aide de ce dictionnaire, nous espérons ramener la rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle à la conjecture de rigidité géométrique suivante concernant les tores de-Sitter singuliers.

Conjecture 6.1. *Entre deux tores de-Sitter ayant les mêmes angles aux singularités et des feuilletages lumières minimaux, toute équivalence topologique entre les bi-feuilletages lumières qui préserve les singularités, est une isométrie.*

6.1.c. *Rigidité des tores de-Sitter à plusieurs singularités vis-à-vis de leurs feuilletages lumières.* Si le théorème B montre la conjecture 6.1 dans le cas d'une unique singularité, un phénomène structurel de dynamique unidimensionnelle apporte une nouvelle difficulté en présence de plusieurs singularités.³⁴ La stratégie de preuve générale du théorème B est de commencer par montrer un résultat de rigidité analogue pour les tores *intégraux*, *i.e.* dont les deux feuilles lumières de la singularité sont fermées, et d'en déduire le résultat attendu par approximation à l'aide de *chirurgies* adaptées le long de géodésiques simples fermées de type temps. Cette stratégie persiste pour un nombre quelconque de singularités, et la seule étape qui repose sur l'existence d'une unique singularité est la rigidité des tores intégraux.

Ces derniers sont identifiés à une famille à un paramètre d'homographies par morceaux du cercle (les échanges d'intervalle $(B_1(x), B_2(x))$ de la figure 2.2) le long duquel le nombre de rotation est croissant. En présence de plusieurs singularités, on est ramené à une famille à plusieurs paramètres d'homéomorphismes du cercle sur laquelle on perd tout contrôle du nombre de rotation. L'une de nos directions de travail consiste à exploiter la nature *algébrique* du problème à l'aide de l'observation suivante : *la rigidité recherchée se traduit par l'unicité des solutions réelles à un système d'équations algébriques.*

6.2. **Quelques perspectives sur les surfaces Lorentziennes singulières.** La nouveauté des surfaces Lorentziennes singulières nécessite un vaste travail d'exploration à leur sujet consistant à élargir le panorama des structures étudiées. Je dégage pour cela trois directions principales.

La première est d'ordre *topologique*, en étudiant les structures Lorentziennes singulières à courbure constante sur toutes les surfaces fermées de *genre supérieur* ou égal à deux. Ces exemples admettent des singularités d'un type plus général, induisant une singularité des feuilletages lumières [Mio24, Remark 4.5]. La seconde direction consiste à inscrire les surfaces Lorentziennes singulières dans le cadre des *espaces de longueurs Lorentziens*, qui généralisent les variétés Lorentziennes dans une formulation *synthétique* (analogue à la généralisation des variétés Riemanniennes par les espaces de longueurs [BH99]). Cette notion suscite un intérêt croissant depuis son introduction récente [KS18 ; KS22 ; Ale+24 ; BS25 ; Man+25], et les surfaces Lorentziennes singulières en fournissent une nouvelle famille d'exemples naturels que l'on pourrait chercher à interpréter

33. Qui est un nouvel homéomorphisme obtenu en prenant le premier retour du précédent sur un petit intervalle.

34. Notons que la question de rigidité différentiable des difféomorphismes par morceaux du cercle n'a de la même manière été résolue pour le moment que dans le cas d'une seule singularité [KKM17 ; KK14]. Notre espoir est que la formulation géométrique du problème permette de passer à un nombre quelconque de singularités.

comme les espaces de longueurs Lorentziens *Gromov-hyperbolique* [BKR24]. Je travaille enfin sur une notion de *surface Lorentzienne singulière à courbure variable positive*⁹. Cette dernière direction est particulièrement enthousiasmante car elle crée de nombreux liens avec des objets préexistants, de nature dynamique (flot géodésique de type temps) ou analytique (Laplacien Lorentzien) par exemple, comme cela est le cas pour les surfaces Riemanniennes à courbure variable négative.

En parallèle de ce travail d'exploration, de nouvelles questions apparaissent dont je donne ci-dessous deux exemples.

6.2.a. *Asymptotique du nombre de géodésiques fermées de type temps.* En présence de géodésiques fermées de type temps, on peut s'intéresser au nombre de géodésiques fermées de longueur plus petite que L et chercher à évaluer l'*asymptotique* de cette quantité lorsque L diverge. Le cas le plus intéressant pour cette question pourrait être celui des surfaces Lorentziennes singulières à courbure positive variable et de genre supérieur. De premières analyses révèlent cependant d'ores et déjà de nouveaux phénomènes intéressants pour les tores, qui sont singulièrement différents du cas Riemannien et suggèrent l'originalité de cette question dans le cas Lorentzien. Son intérêt a été mis en évidence pour les surfaces Riemanniennes par un résultat pionnier de Margulis montrant le lien entre l'asymptotique du nombre de géodésiques fermées et les propriétés dynamiques du flot géodésique de la surface sous-jacente [Mar69]. J'aimerais comprendre si ce comptage est de la même manière relié dans le cas Lorentzien à la dynamique du flot géodésique de type temps (récemment étudié en dimension supérieure [DMS25]), ou au *Laplacien Lorentzien*³⁵.

6.2.b. *Dynamique du groupe modulaire sur les variétés des caractères relatives.* Le groupe modulaire du tore³⁶ agit proprement discontinûment sur les ouverts des variétés des caractères $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ relatives des tores troués correspondant à des métriques hyperboliques, et Goldman a conjecturé que l'action sur toute composante connexe du complémentaire de ces ouverts est ergodique [Gol06]. Si des réponses positives partielles y ont été apportées [Gol03; MW16], cette conjecture reste encore très largement ouverte. La géométrisation des caractères $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ du tore troué par des structures de-Sitter à une singularité (théorème D) permet d'étudier partiellement la dynamique du groupe modulaire sur la variété des caractères relative, à partir de sa dynamique sur l'espace de déformation géométrique. Or une partie de l'espace de déformation des tores de-Sitter à une singularité s'identifie avec $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \setminus \text{diagonale}$ de manière équivariante pour l'action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (théorème A), et cette identification est de plus *propre* selon [Mio24, Theorem E]. Nous souhaitons utiliser cette correspondance pour étudier certaines questions de dynamique topologique qui ne sont pas traitées dans [Gol03].

7. DYNAMIQUES (PARTIELLEMENT) HYPERBOLIQUES : NOUVEAUX EXEMPLES ET RIGIDITÉ LISSE

Les flots Anosov et difféomorphismes partiellement hyperboliques sont caractérisés par l'existence de sous-fibrés stable E^s et instable E^u du fibré tangent (voir définition 3.2 et figure 3.1) qui sont généralement seulement continus, mais qui sont lisses pour les *exemples algébriques* 3.1. Cette observation a motivé un intérêt important et ancien pour la question 3.3 de *rigidité lisse* des dynamiques (partiellement) hyperboliques, tenant à montrer que *les exemples algébriques sont les seuls dont les fibrés invariants sont lisses*. De nombreux travaux [Ghy87; Kan88; HK90; BFL92; BL93; Fan05] y ont apporté des réponses positives partielles, et cette question a depuis été essentiellement laissée de côté jusqu'aux travaux présentés dans la section 3 concernant les difféomorphismes partiellement hyperboliques. Le second axe principal de mon programme de recherche s'inscrit dans le cadre de cette question, dans le but de poursuivre son étude générale dans deux directions majeures : d'une part en l'absence d'hypothèses de rigidité géométrique *a priori*, et d'autre part en dimension supérieure.

35. Qui est un opérateur *hyperbolique* et non pas elliptique comme le Laplacien Riemannien, ce qui rend son étude plus difficile.

36. Qui est le groupe de ses homéomorphismes modulo isotopies.

7.1. Rigidité au delà du cas contact. L'objectif des projets présentés dans ce paragraphe est d'entamer l'étude de la question 3.3 en dehors des deux cas extrêmes où le champ d'hyperplans stable-instable $E^s \oplus E^u$ est intégrable ou est une structure de contact. L'idée principale permettant de s'extraire de ces contraintes consiste à étudier les fibrés invariants (E^s, E^c, E^u) comme une structure géométrique en elle-même au lieu de chercher à en extraire une structure géométrique auxiliaire.

7.1.a. Géométries intermédiaires entre intégrable et contact. Un flot Anosov (φ^t) préserve toujours la 1-forme canonique θ de noyau $E^s \oplus E^u$ et valant 1 sur le champ de vecteur tangent au flot. Dans les travaux antérieurs [Kan88; BFL92] sur les flots Anosov, la structure géométrique rigide invariante par le flot est obtenue en supposant que la somme $E^s \oplus E^u$ est une *structure de contact* (voir définition 3.5). La différentielle de la forme canonique définit en effet dans ce cas une *forme symplectique* invariante $d\theta$ en restriction à $E^s \oplus E^u$, et l'existence de la décomposition lisse invariante $E^s \oplus E^u$ permet de « symétriser » cette 2-forme pour obtenir une *métrique pseudo-Riemannienne* invariante. Le travail est alors centré sur l'étude de la connexion de Levi-Civita de cette métrique, originellement introduite par Kanai. Dans d'autres travaux [BL93; Fan05], l'hypothèse de contact sur $E^s \oplus E^u$ est remplacée par l'existence d'une forme symplectique invariante jouant ensuite le même rôle que $d\theta$. Dans tous ces travaux, c'est une hypothèse géométrique *a priori* sur la somme $E^s \oplus E^u$ qui permet de définir une structure géométrique invariante auxiliaire.

Sur une variété de dimension $2n+1$, la 1-forme canonique θ définit une forme continue invariante $\theta \wedge (d\theta)^n$, si $E^s \oplus E^u$ est de classe C^1 . Le théorème de Livšic impose sur une telle forme ω de degré maximal la dichotomie suivante : ω ne s'annule pas, ou est identiquement nulle [HK90, Theorem 2.3]. Cette dichotomie est hautement spécifique aux flots Anosov et s'évanouit pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques. Le premier cas de cette dichotomie signifie par définition que θ est une forme de contact. Le second cas est équivalent à l'intégrabilité du champ de plans $E^s \oplus E^u = \text{Ker } \theta$ en dimension trois (selon le théorème de Frobenius), mais ce n'est plus le cas à partir de la dimension cinq. On obtient finalement pour les flots Anosov à fibrés invariants lisses en dimension trois la dichotomie suivante : $E^s \oplus E^u$ est intégrable, ou est une structure de contact. Le flot est équivalent à la suspension d'un difféomorphisme Anosov dans le cas intégrable selon des travaux de Plante [Pla72, Theorem 3.1]. Pour les flots Anosov de dimension trois, la question 3.3 se ramène donc *in fine* à l'étude du cas où $E^s \oplus E^u$ est de contact [Ghy87].

Les flots Anosov en dimension trois constituent le seul cas où la question 3.3 est entièrement résolue. La dichotomie « $E^s \oplus E^u$ est intégrable ou de contact » est en effet fausse aussi bien pour les flots Anosov à partir de la dimension cinq, que pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques dès la dimension trois.

7.1.b. Difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois. Nous étudions avec Rafael Potrie les difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois à fibrés lisses, admettant une orbite dense et dont le champ de plan $E^s \oplus E^u$ n'est pas intégrable. Le fibré $E^s \oplus E^u$ est alors une structure de contact sur un ouvert dense $O \subset M$, où la paire (E^s, E^u) définit une structure géométrique rigide : une *géométrie de chemins* (voir définition 4.2). La première difficulté est d'étudier cette structure en l'absence de compacité de l'ouvert O . À partir des méthodes développées dans [Mio22b], on montre que cette structure est localement homogène. La seconde et principale difficulté est ensuite de déduire de cette information sur O une information globale sur l'ensemble de la variété. La classification *topologique* des difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois a récemment connu des avancées majeures [BFP23; FP24; FP25]. L'interaction de ces nouvelles informations dynamiques avec la structure géométrique rigide sur O nous permet désormais d'espérer un résultat de rigidité.

7.1.c. Flots d'Anosov en dimension cinq. Nous étudions avec Karin Melnick les flots Anosov en dimension cinq à fibrés invariants lisses, pour lesquels $E^s \oplus E^u$ n'est ni intégrable ni contact. Divers travaux de Fang [Fan04; Fan05; Fan07] ont étudié cette question dans des situations spécifiques d'un point de vue géométrique (existence d'une métrique pseudo-Riemannienne préservée) ou dynamique (unique exposant de Lyapunov non-nul). En l'absence de telles hypothèses, la première observation importante est que $E^s \oplus E^u$ est « une structure de contact transversalement au noyau de $d\theta$ ». La notion de *géométrie de Cartan* et les méthodes développées dans [FMV21] permettent

alors de montrer que $\text{Ker } d\theta$ s'intègre en un feuilletage admettant une *structure drapeaux* transverse (voir paragraphe 4.1.b). La théorie des *formes normales* [GK98 ; Fer04] nous permet par ailleurs d'obtenir des structures géométriques invariantes partielles. Malgré ces différents outils, nous butons depuis longtemps sur des difficultés importantes et qui semble structurelles, dûes en grande partie au manque de régularité des formes normales. La notion de *connexion dynamique* s'est montrée féconde dans différents travaux récents sur des problèmes similaires [Lef23 ; Bea25] en interaction avec des techniques d'analyse micro-locale, et nous comptons explorer cette direction.

7.2. Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension supérieure. Dans le cas des flots Anosov dont la somme $E^s \oplus E^u$ est une structure de contact, la question 3.3 a été entièrement résolue par le travail de Benoist-Foulon-Labourie. La structure géométrique utilisée dans ce cas est similaire à la *connexion de Kanai* présentée au paragraphe 7.1.a, et repose sur l'existence d'une forme de contact invariante θ de noyau $E^s \oplus E^u$. Une telle forme invariante n'existe pas automatiquement dans le cas partiellement hyperbolique : elle n'existe que si le difféomorphisme est *isométrique* dans la direction centrale. Nous avons exploré cette situation pendant un long moment avec Elisha Falbel mais même dans ce cas particulier, la nature *partiellement* hyperbolique de la dynamique empêche de construire une connexion « à la Kanai ».

Il me semble désormais que le bon point de vue pour étudier la question 3.3 dans le cas des difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension supérieure dont la somme $E^s \oplus E^u$ est de contact, est d'étudier la structure définie par la paire (E^s, E^u) appelée *structure Lagrangienne de contact* [Tak94b]. Ces structures généralisent en dimension supérieure les géométries de chemins introduites au paragraphe 4.1, et peuvent être étudiées grâce aux *géométries de Cartan* [ČS09] de manière analogue aux géométries de chemins. Elles ont cependant des propriétés fondamentalement différentes en dimension supérieure à trois. La géométrie de chemins (E^s, E^u) invariante par le flot géodésique d'une surface hyperbolique S est plate [Tre96a ; FMV24]. Mais ce phénomène est hautement spécifique à la dimension trois (qui est celle de l'espace ambiant T^1S supportant la dynamique et la géométrie de chemins (E^s, E^u)). La structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) préservée par le flot géodésique d'une variété hyperbolique fermée M^3 de dimension trois (qui vit donc sur une variété T^1M de dimension cinq) n'est en effet d'ores et déjà plus plate. Cela annonce une plus grande richesse et complexité, et laisse également espérer plus de rigidité des structures Lagrangiennes de contact en dimension supérieure à trois.

Ces observations motivent le programme de recherche de long terme suivant concernant les difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension supérieure. La première étape est d'étudier les structures Lagrangiennes de contact invariantes par les flots géodésiques des espaces symétriques de rang un, et de caractériser leur courbure d'un point de vue « dynamico-algébrique ». On peut ensuite espérer que la dynamique partiellement hyperbolique impose à la courbure de sa structure Lagrangienne de contact invariante (E^s, E^u) d'être d'une forme très particulière. L'image simplificatrice à avoir en tête est que cette courbure est soit nulle, soit celle de la structure Lagrangienne de contact invariante par le flot géodésique d'un espace symétrique de rang un. Cela ramènerait le problème à l'étude de structures localement homogènes, et aurait ainsi l'avantage important d'éviter la difficulté principale apparaissant dans l'étude des flots Anosov de contact par la méthode de [BFL92], qui est précisément de montrer que le rang de l'espace homogène obtenu est égal à un.

7.3. Flots Anosov en dimension cinq par chirurgies. En parallèle de l'étude du problème de rigidité lisse des dynamiques hyperboliques, il est souhaitable de disposer de nombreux exemples non-algébriques, qui manquent en dimension supérieure à trois. Les seuls exemples non-algébriques connus de flots Anosov en dimension cinq sont par exemple des chirurgies « à la Franks-Williams » sur les flots géodésiques de variétés hyperboliques fermées de dimension trois [Bar+21]. Nous étudions avec Pierre Dehornoy et Clément Perrault de nouveaux types de chirurgies sur ces flots géodésiques en dimension cinq en nous inspirant de la construction de Handel-Thurston [HT80]. L'une des difficultés importantes de l'adaptation de cette construction réside dans la spécificité topologique de la dimension trois. Certaines procédures changent en effet la topologie en dimension trois mais deviennent topologiquement triviales en dimension supérieure.

Bibliographie et index

INDEX DES RÉSULTATS PRÉSENTÉS

Théorème A [Mio24], 8	Théorème F [FMV21], 14
Théorème B [Mio24], 8	Théorème G [FMV24], 15
Théorème C [Mioonb], 8	Théorème H [FM24], 16
Théorème D [MMWon], 9	Théorème I [FM24], 16
Théorème E [Mio22b], 11	Théorème J [Mio22a], 16

INDEX DES (PRÉ-)PUBLICATIONS PRÉSENTÉES

Tores de-Sitter singuliers, uniformisation et rigidité (section 2).

- [Mio24] M MION-MOUTON. Rigidity of singular de-Sitter tori with respect to their lightlike bi-foliation. Révision en cours aux *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (2024). DOI : [10.48550/ARXIV.2410.03260](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2410.03260).
- [Mioona] M MION-MOUTON. Closed timelike geodesics of singular de-Sitter tori (en préparation).
- [Mioonb] M MION-MOUTON. Rigidity of the timelike marked length spectrum of singular de-Sitter tori (en préparation).
- [MMWon] F MARTIN-BAILLON, M MION-MOUTON et M WOLFF. Geometrization of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -characters of a one-holed torus by de-Sitter structures (en préparation).

Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins (sections 3 et 4).

- [FMV21] E FALBEL, M MION-MOUTON et JM VELOSO. Cartan connections and path structures with large automorphism groups. *International Journal of Mathematics* (2021). DOI : [10.1142/S0129167X21400164](https://doi.org/10.1142/S0129167X21400164).
- [FMV24] E FALBEL, M MION-MOUTON et JM VELOSO. Reductions of path structures and classification of homogeneous structures in dimension three. À paraître dans *Transformation groups* (172024). DOI : [10.1007/s00031-025-09937-9](https://doi.org/10.1007/s00031-025-09937-9).
- [Mio22b] M MION-MOUTON. Partially hyperbolic diffeomorphisms and Lagrangian contact structures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 42.8 (2022), p. 2583-2629. DOI : [10.1017/etds.2021.54](https://doi.org/10.1017/etds.2021.54).

Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (section 5).

- [FM24] E FALBEL et M MION-MOUTON. Geometric surgeries of three-dimensional flag structures and non-uniformizable examples. À paraître dans *Transactions of the American Mathematical Society* (42024). DOI : [10.1090/tran/9532](https://doi.org/10.1090/tran/9532).
- [Mio22a] M MION-MOUTON. Geometrical compactifications of geodesic flows and path structures. *Geometriae Dedicata* 217.2 (2022), p. 18. DOI : [10.1007/s10711-022-00751-1](https://doi.org/10.1007/s10711-022-00751-1).

BIBLIOGRAPHIE

- [Ale+24] SB ALEXANDER, M GRAF, M KUNZINGER et C SÄMANN. Generalized cones as Lorentzian length spaces : Causality, curvature, and singularity theorems. *Communications in Analysis and Geometry* 31.6 (2024), p. 1469-1528. DOI : [10.4310/CAG.2023.v31.n6.a5](https://doi.org/10.4310/CAG.2023.v31.n6.a5).
- [AM24] S ALLOUT et K MOGHADDAMFAR. On partially hyperbolic diffeomorphisms in dimension three via a notion of autonomous dynamics. *Bulletin de la Société mathématique de France* (2024). DOI : [10.24033/bsmf.2879](https://doi.org/10.24033/bsmf.2879).
- [Ano69] DV ANOSOV. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967). American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [Arn64] VI ARNOL'D. Small denominators. I : Mapping the circle onto itself. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 25 (1964), p. 21-86.

- [Bar+21] T BARTHELMÉ, C BONATTI, A GOGOLEV et F RODRIGUEZ HERTZ. Anomalous Anosov flows revisited. *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series* 122.1 (2021), p. 93-117. DOI : [10.1112/plms.12321](https://doi.org/10.1112/plms.12321).
- [Bar10] T BARBOT. Three-dimensional Anosov flag manifolds. *Geometry & Topology* 14.1 (2010), p. 153-191. DOI : [10.2140/gt.2010.14.153](https://doi.org/10.2140/gt.2010.14.153).
- [BBS11] T BARBOT, F BONSANTE et JM SCHLENKER. Collisions of particles in locally AdS spacetimes. I. Local description and global examples. *Communications in Mathematical Physics* 308.1 (2011), p. 147-200. DOI : [10.1007/s00220-011-1318-6](https://doi.org/10.1007/s00220-011-1318-6).
- [BCG95] G BESSON, G COURTOIS et S GALLOT. Entropy and rigidity of locally symmetric spaces of strictly negative curvature. *Geometric and Functional Analysis. GAFA* 5.5 (1995), p. 731-799. DOI : [10.1007/BF01897050](https://doi.org/10.1007/BF01897050).
- [BDP03] C BONATTI, LJ DÍAZ et ER PUJALS. A C^1 -generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks of sources. *Annals of Mathematics. Second Series* 158.2 (2003), p. 355-418. DOI : [10.4007/annals.2003.158.355](https://doi.org/10.4007/annals.2003.158.355).
- [Bea25] LB BEAUFORT. *On Kanai's conjecture for frame flows over negatively curved manifolds*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2509.09500](https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.09500).
- [BFL92] Y BENOIST, P FOULON et F LABOURIE. Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. *Journal of the American Mathematical Society* 5.1 (1992), p. 33-74.
- [BFP23] T BARTHELMÉ, SR FENLEY et R POTRIE. Collapsed Anosov flows and self orbit equivalences. *Commentarii Mathematici Helvetici* 98.4 (2023), p. 771-875. DOI : [10.4171/cmh/557](https://doi.org/10.4171/cmh/557).
- [BGT25] A BOULANGER, S GHAZOUANI et G TAHAR. Closed geodesics in dilation surfaces. *Geometry & Topology* 29.4 (2025), p. 2217-2250. DOI : [10.2140/gt.2025.29.2217](https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.2217).
- [BH99] MR BRIDSON et A HAEFLIGER. *Metric spaces of non-positive curvature*. T. 319. Berlin : Springer, 1999.
- [BK85] K BURNS et A KATOK. Manifolds with non-positive curvature. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 5 (1985), p. 307-317. DOI : [10.1017/S0143385700002935](https://doi.org/10.1017/S0143385700002935).
- [BKR24] T BERAN, M KUNZINGER et F ROTT. On curvature bounds in Lorentzian length spaces. *Journal of the London Mathematical Society* 110.2 (2024), e12971. DOI : [10.1112/jlms.12971](https://doi.org/10.1112/jlms.12971).
- [BL18] A BANKOVIC et CJ LEININGER. Marked-length-spectral rigidity for flat metrics. *Transactions of the American Mathematical Society* 370.3 (2018), p. 1867-1884. DOI : [10.1090/tran/7005](https://doi.org/10.1090/tran/7005).
- [BL93] Y BENOIST et F LABOURIE. About affine Anosov diffeomorphisms with differentiable stable and instable foliations. *Inventiones Mathematicae* 111.2 (1993), p. 285-308. DOI : [10.1007/BF01231289](https://doi.org/10.1007/BF01231289).
- [BS25] M BRAUN et C SÄMANN. *Gromov's reconstruction theorem and measured Gromov-Hausdorff convergence in Lorentzian geometry*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2506.10852](https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.10852).
- [BS76] Dj BURNS et S SHNIDER. Spherical hypersurfaces in complex manifolds. *Inventiones Mathematicae* 33 (1976), p. 223-246. DOI : [10.1007/BF01404204](https://doi.org/10.1007/BF01404204).
- [Can19] S CANTAT. Recent progress concerning Zimmer program [after A. Brown, D. Fisher, and S. Hurtado]. In : *Séminaire Bourbaki. Volume 2017/2018. Exposés 1136-1150*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2019, 1-48, ex.
- [Car10] É CARTAN. Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 27 (1910), p. 109-192.
- [Car24] É CARTAN. Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52 (1924), p. 205-241. DOI : [10.24033/bsmf.1053](https://doi.org/10.24033/bsmf.1053).
- [CPR20] PD CARRASCO, E PUJALS et F RODRIGUEZ-HERTZ. Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms under some rigid conditions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2020), p. 1-12. DOI : [10.1017/etds.2020.85](https://doi.org/10.1017/etds.2020.85).
- [Cro90] CB CROKE. Rigidity for surfaces of non-positive curvature. *Commentarii Mathematici Helvetici* 65.1 (1990), p. 150-169. DOI : [10.1007/BF02566599](https://doi.org/10.1007/BF02566599).

- [ČS09] A ČAP et J SLOVÁK. *Parabolic geometries I Background and general theory*. T. 154. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, p. x+628. DOI : [10.1090/surv/154](https://doi.org/10.1090/surv/154).
- [CT20] R CANARY et K TSOUVALAS. Topological restrictions on Anosov representations. *Journal of Topology* 13.4 (2020), p. 1497-1520. DOI : [10.1112/topo.12166](https://doi.org/10.1112/topo.12166).
- [Den32] A DENJOY. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série* 11 (1932), p. 333-375.
- [Dey25] S DEY. On Borel Anosov subgroups of $SL(d, \mathbb{R})$. *Geometry & Topology* 29.1 (2025), p. 171-192. DOI : [10.2140/gt.2025.29.171](https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.171).
- [DFG19] E DURYEV, C FOUGERON et S GHAZOUANI. Dilation surfaces and their Veech groups. *Journal of Modern Dynamics* 14.0 (2019), p. 121-151. DOI : [10.3934/jmd.2019005](https://doi.org/10.3934/jmd.2019005).
- [DMS25] B DELARUE, D MONCLAIR et A SANDERS. Locally Homogeneous Axiom A Flows I : Projective Anosov Subgroups and Exponential Mixing. *Geometric and Functional Analysis* 35.3 (2025), p. 673-735. DOI : [10.1007/s00039-025-00712-2](https://doi.org/10.1007/s00039-025-00712-2).
- [DPU99] LJ DÍAZ, ER PUJALS et R URES. Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Mathematica* 183.1 (1999), p. 1-43. DOI : [10.1007/BF02392945](https://doi.org/10.1007/BF02392945).
- [Dum+25] S DUMITRESCU, C FRANCES, K MELNICK, V PECASTAING et A ZEGHIB. *A local Lorentzian Ferrand-Obata theorem for conformal vector fields*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2511.03713](https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.03713).
- [Dza84] JJ DZAN. Gauss-Bonnet formula for general Lorentzian surfaces. *Geometriae Dedicata* 15 (1984), p. 215-231. DOI : [10.1007/BF00147645](https://doi.org/10.1007/BF00147645).
- [Fal92] E FALBEL. Non-embeddable CR-manifolds and surface singularities. *Inventiones Mathematicae* 108.1 (1992), p. 49-65. DOI : [10.1007/BF02100599](https://doi.org/10.1007/BF02100599).
- [Fan04] Y FANG. Smooth rigidity of uniformly quasiconformal Anosov flows. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 24.6 (2004), p. 1937-1959. DOI : [10.1017/S0143385704000264](https://doi.org/10.1017/S0143385704000264).
- [Fan05] Y FANG. Geometric Anosov flows of dimension five with smooth distributions. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 4.3 (2005), p. 333-362. DOI : [10.1017/S1474748005000083](https://doi.org/10.1017/S1474748005000083).
- [Fan07] Y FANG. On the rigidity of quasiconformal Anosov flows. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27.6 (2007), p. 1773-1802. DOI : [10.1017/S0143385707000326](https://doi.org/10.1017/S0143385707000326).
- [Fer04] R FERES. A differential-geometric view of normal forms of contractions. In : *Modern dynamical systems and applications. Dedicated to Anatole Katok on his 60th birthday*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004, p. 103-121.
- [Fer96] J FERRAND. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Mathematische Annalen* 304.2 (1996), p. 277-291. DOI : [10.1007/BF01446294](https://doi.org/10.1007/BF01446294).
- [FP24] SR FENLEY et R POTRIE. Accessibility and ergodicity for collapsed Anosov flows. *American Journal of Mathematics* 146.5 (2024), p. 1339-1359. DOI : [10.1353/ajm.2024.a937945](https://doi.org/10.1353/ajm.2024.a937945).
- [FP25] SR FENLEY et R POTRIE. *Partially hyperbolic diffeomorphisms, ergodicity, and transverse foliations in dimension 3*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2510.15176](https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.15176).
- [Fra04] C FRANCES. Lorentzian Kleinian groups. *Commentarii Mathematici Helvetici* 80 (2004). DOI : [10.4171/CMH/38](https://doi.org/10.4171/CMH/38).
- [Fra05] C FRANCES. Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel. *Mathematische Annalen* 332.1 (2005), p. 103-119. DOI : [10.1007/s00208-004-0619-x](https://doi.org/10.1007/s00208-004-0619-x).
- [Fra20] C FRANCES. Lorentz dynamics on closed 3-manifolds. *Annales Henri Lebesgue* 3 (2020), p. 407-471. DOI : [10.5802/ahl.37](https://doi.org/10.5802/ahl.37).
- [GD91] M GROMOV et G D'AMBRA. Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in differential geometry* (1991).
- [Gei06] H GEIGES. Chapter 5 Contact geometry. In : *Handbook of Differential Geometry*. T. 2. North-Holland, 2006, p. 315-382. DOI : [10.1016/S1874-5741\(06\)80008-7](https://doi.org/10.1016/S1874-5741(06)80008-7).
- [Gha21] S GHAZOUANI. Local rigidity for periodic generalised interval exchange transformations. *Inventiones Mathematicae* 226.2 (2021), p. 467-520. DOI : [10.1007/s00222-021-01051-3](https://doi.org/10.1007/s00222-021-01051-3).

- [Ghy87] É GHYS. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 20.2 (1987), p. 251-270.
- [GK22] S GHAZOUANI et K KHANIN. The symplectic structure for renormalization of circle diffeomorphisms with breaks. *Communications in Contemporary Mathematics* 24.1 (2022), p. 23. DOI : [10.1142/S0219199721500164](#).
- [GK98] M GUYSINSKY et A KATOK. Normal forms and invariant geometric structures for dynamical systems with invariant contracting foliations. *Mathematical Research Letters* 5.1-2 (1998), p. 149-163. DOI : [10.4310/MRL.1998.v5.n2.a2](#).
- [GL19] C GUILLARMOU et T LEFEUVRE. The marked length spectrum of Anosov manifolds. *Annals of Mathematics. Second Series* 190.1 (2019), p. 321-344. DOI : [10.4007/annals.2019.190.1.6](#).
- [Gol03] WM GOLDMAN. The modular group action on real $SL(2)$ -characters of a one-holed torus. *Geometry & Topology* 7 (2003), p. 443-486. DOI : [10.2140/gt.2003.7.443](#).
- [Gol06] WM GOLDMAN. Mapping class group dynamics on surface group representations. In : *Problems on mapping class groups and related topics*. Sous la dir. de B FARB. Proceedings of symposia in pure mathematics v. 74. Providence, R.I : American Mathematical Society, 2006.
- [Gol97] WM GOLDMAN. Ergodic Theory on Moduli Spaces. *The Annals of Mathematics* 146.3 (1997), p. 475. DOI : [10.2307/2952454](#).
- [Gué+17] F GUÉRITAUD, O GUICHARD, F KASSEL et A WIENHARD. Anosov representations and proper actions. *Geometry & Topology* 21.1 (2017), p. 485-584. DOI : [10.2140/gt.2017.21.485](#).
- [GW08] O GUICHARD et A WIENHARD. Convex foliated projective structures and the Hitchin component for $PSL_4(R)$. *Duke Mathematical Journal* 144.3 (2008), p. 381-445. DOI : [10.1215/00127094-2008-040](#).
- [GW12] O GUICHARD et A WIENHARD. Anosov representations : domains of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae* 190.2 (2012), p. 357-438. DOI : [10.1007/s00222-012-0382-7](#).
- [Her79] MR HERMAN. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. (On smooth conjugacy of diffeomorphisms of the circle with rotations). *Publications Mathématiques* 49 (1979), p. 5-233. DOI : [10.1007/BF02684798](#).
- [HK90] S HURDER et A KATOK. Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows. *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 72 (1990), p. 5-61.
- [HP97] S HERSONSKY et F PAULIN. On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces. *Commentarii Mathematici Helvetici* 72.3 (1997), p. 349-388. DOI : [10.1007/s000140050022](#).
- [HT80] M HANDEL et WP THURSTON. Anosov flows on new three manifolds. *Inventiones Mathematicae* 59.2 (1980), p. 95-103. DOI : [10.1007/BF01390039](#).
- [Kan88] M KANAI. Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 8.02 (1988). DOI : [10.1017/S0143385700004430](#).
- [KF96] F KLEIN et R FRICKE. *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*. Leipzig, B.G. Teubner, 1896.
- [KK03] K KHANIN et D KHMELEV. Renormalizations and Rigidity Theory for Circle Homeomorphisms with Singularities of the Break Type. *Communications in Mathematical Physics* 235.1 (2003), p. 69-124. DOI : [10.1007/s00220-003-0809-5](#).
- [KK14] K KHANIN et S KOCIĆ. Renormalization conjecture and rigidity theory for circle diffeomorphisms with breaks. *Geometric and Functional Analysis* 24.6 (2014), p. 2002-2028. DOI : [10.1007/s00039-014-0309-0](#).
- [KKM17] K KHANIN, S KOCIĆ et E MAZZEO. C^1 -rigidity of circle maps with breaks for almost all rotation numbers. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 50.5 (2017), p. 1163-1203. DOI : [10.24033/asens.2642](#).

- [KLP18] M KAPOVICH, B LEEB et J PORTI. Dynamics on flag manifolds : domains of proper discontinuity and cocompactness. *Geometry & Topology* 22.1 (2018), p. 157-234. DOI : [10.2140/gt.2018.22.157](https://doi.org/10.2140/gt.2018.22.157).
- [KP86] RS KULKARNI et U PINKALL. Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry. In : 1986.
- [KS18] M KUNZINGER et C SÄMANN. Lorentzian length spaces. *Annals of Global Analysis and Geometry* 54.3 (2018), p. 399-447. DOI : [10.1007/s10455-018-9633-1](https://doi.org/10.1007/s10455-018-9633-1).
- [KS22] M KUNZINGER et R STEINBAUER. Null Distance and Convergence of Lorentzian Length Spaces. *Annales Henri Poincaré* 23.12 (2022), p. 4319-4342. DOI : [10.1007/s00023-022-01198-6](https://doi.org/10.1007/s00023-022-01198-6).
- [Kul78] RS KULKARNI. On the principle of uniformization. *Journal of Differential Geometry* 13 (1978), p. 109-138. DOI : [10.4310/jdg/1214434351](https://doi.org/10.4310/jdg/1214434351).
- [KV91] K KHANIN et E VUL. Circle homeomorphisms with weak discontinuities. In : t. 3. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1991, p. 57-98. DOI : [10.1090/advsov/003/03](https://doi.org/10.1090/advsov/003/03).
- [Lab06] F LABOURIE. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones Mathematicae* 165.1 (2006), p. 51-114. DOI : [10.1007/s00222-005-0487-3](https://doi.org/10.1007/s00222-005-0487-3).
- [Lef23] T LEFEUVRE. Isometric Extensions of Anosov Flows via Microlocal Analysis. *Communications in Mathematical Physics* 399.1 (2023), p. 453-479. DOI : [10.1007/s00220-022-04561-0](https://doi.org/10.1007/s00220-022-04561-0).
- [LM24] R LEE et K MELNICK. *Classification of closed conformally flat Lorentzian manifolds with unipotent holonomy*. 2024. DOI : [10.48550/arXiv.2405.08410](https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.08410).
- [Man+25] M MANZANO, K MOSANI, C SÄMANN et O ZOGLAMI. *Conformal transformations of metric spaces and Lorentzian pre-length spaces*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2512.05842](https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.05842).
- [Mar69] GA MARGULIS. Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Functional Analysis and Its Applications* 3.4 (1969), p. 335-336. DOI : [10.1007/BF01076325](https://doi.org/10.1007/BF01076325).
- [Mio20] M MION-MOUTON. Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact. Thèse. Université de Strasbourg, 2020.
- [Mit24] D MITSUTANI. *Symmetries of geodesic flows on covers and rigidity*. 2024. DOI : [10.48550/arXiv.2402.09576](https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.09576).
- [MP22] K MELNICK et V PECASTAING. The conformal group of a compact simply connected Lorentzian manifold. *Journal of the American Mathematical Society* 35.1 (2022), p. 81-122. DOI : [10.1090/jams/976](https://doi.org/10.1090/jams/976).
- [MW16] J MARCHÉ et M WOLFF. The modular action on $PSL_2(\mathbb{R})$ -characters in genus 2. *Duke Mathematical Journal* 165.2 (2016), p. 371-412. DOI : [10.1215/00127094-3166522](https://doi.org/10.1215/00127094-3166522).
- [NR25] A NOLTE et JM RIESTENBERG. Concave foliated flag structures and the $SL_3(\mathbb{R})$ Hitchin component. *Advances in Mathematics* 480 (2025), p. 110504. DOI : [10.1016/j.aim.2025.110504](https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110504).
- [Oba71] M OBATA. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry* 6.2 (1971), p. 247-258. DOI : [10.4310/jdg/1214430407](https://doi.org/10.4310/jdg/1214430407).
- [Ota90] JP OTAL. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. (The spectrum marked by lengths of surfaces with negative curvature). *Annals of Mathematics. Second Series* 131.1 (1990), p. 151-162. DOI : [10.2307/1971511](https://doi.org/10.2307/1971511).
- [Pla72] JF PLANTE. Anosov flows. *American Journal of Mathematics* 94 (1972), p. 729-754. DOI : [10.2307/2373755](https://doi.org/10.2307/2373755).
- [Pot18] R POTRIE. Robust dynamics, invariant structures and topological classification. In : *Proceedings of the international congress of mathematicians 2018, ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018. Volume III. Invited lectures*. Hackensack, NJ : World Scientific ; Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2018, p. 2063-2085. DOI : [10.1142/9789813272880_0130](https://doi.org/10.1142/9789813272880_0130).
- [Pot25] R POTRIE. Anosov flows in dimension 3 : an outside look. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 27.1 (2025), p. 21. DOI : [10.1007/s11784-025-01175-6](https://doi.org/10.1007/s11784-025-01175-6).

- [Sha97] R SHARPE. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program. Foreword by S. S. Chern.* Berlin : Springer, 1997, p. xix + 421.
- [Tak94a] M TAKEUCHI. Lagrangean contact structures on projective cotangent bundles. *Osaka J. Math* 31 (1994), p. 837-860.
- [Tak94b] M TAKEUCHI. Lagrangean contact structures on projective cotangent bundles. *Osaka Journal of Mathematics* 31.4 (1994), p. 837-860.
- [Thu97] WP THURSTON. *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1 : Volume 1.* Sous la dir. de S LEVY. Princeton University Press, 1997.
- [Tre96a] A TRESSE. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$.* Preisschriften gekrönt und hrsg. von der Fürstlich Jablonowskischen gesellschaft zu Leipzig. XXXII. Nr. XIII der mathematischen-naturwissenschaftlichen section. Leipzig : S. Hirzel, 1896.
- [Tre96b] A TRESSE. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$.* Leipzig : S. Hirzel, 1896.
- [Tro86] M TROYANOV. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. (Euclidean surfaces with cone singularities). *L'Enseignement Mathématique. 2e Série* 32 (1986), p. 79-94.
- [Tro91] M TROYANOV. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Transactions of the American Mathematical Society* 324.2 (1991), p. 793-821. DOI : [10.2307/2001742](https://doi.org/10.2307/2001742).
- [Yoc10] JC YOCCOZ. Interval exchange maps and translation surfaces. In : *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic. Proceedings of the Clay Mathematics Institute summer school, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy, June 11–July 6, 2007.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS); Cambridge, MA : Clay Mathematics Institute, 2010, p. 1-69.
- [Yoc84a] JC YOCCOZ. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 17.3 (1984), p. 333-359. DOI : [10.24033/asens.1475](https://doi.org/10.24033/asens.1475).
- [Yoc84b] JC YOCCOZ. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 17.3 (1984), p. 333-359. DOI : [10.24033/asens.1475](https://doi.org/10.24033/asens.1475).
- [Zeg99] A ZEGHIB. Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. I : Foundations of Lorentz dynamics. *Geometric and Functional Analysis. GAFA* 9.4 (1999), p. 775-822.
- [Zim87] RJ ZIMMER. Lattices in Semisimple Groups and Invariant Geometric Structures on Compact Manifolds. In : *Discrete Groups in Geometry and Analysis : Papers in Honor of G.D. Mostow on His Sixtieth Birthday.* Sous la dir. de R HOWE. Boston, MA : Birkhäuser, 1987, p. 152-210. DOI : [10.1007/978-1-4899-6664-3_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6664-3_6).
- [Zor06] A ZORICH. Flat surfaces. In : *Frontiers in number theory, physics, and geometry I. On random matrices, zeta functions, and dynamical systems. Papers from the meeting, Les Houches, France, March 9–21, 2003.* 2nd printing. Berlin : Springer, 2006, p. 437-583.

MARTIN MION-MOUTON, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE (I2M)

Adresse e-mail : martin.mion-mouton@univ-amu.fr

Page web : <https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/martin.mion-mouton/index.html>