

Une introduction concrète aux dynamiques chaotiques: orbites périodiques et entropie de la cat-map*

Louise Nguyen[†]

mai-juin 2026

Ce rapport de stage constitue une introduction aux systèmes dynamiques, et à l'étude de leur *complexité* et de leur *chaos*, à travers des exemples concrets : rotations du cercle, systèmes symboliques, cat-map d'Arnold. Ce dernier système est la donnée de l'itération de la projection de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Parmi les critères déterminant le caractère chaotique d'un système, on s'intéresse particulièrement à l'*entropie topologique*, une quantité reliée à la capacité qu'a un système dynamique à « éloigner » ses points. Enfin, on démontre sur la cat-map une relation asymptotique entre la croissance des orbites périodiques et l'entropie topologique, avec des mécanismes effectivement généralisables à une grande famille de systèmes chaotiques.

Table des matières

1	Systèmes dynamiques	2
1.1	Généralités	2
1.2	Rotations du cercle	3
1.3	Systèmes symboliques (de Markov)	7
1.3.1	Shift-map, chaînes de Markov topologiques	7
1.3.2	Encodage de la doubling map, partition de Markov	10
1.4	Un système toral hyperbolique : la cat-map d'Arnold	12
2	Complexité d'un système	17
2.1	Transitivité topologique	17
2.2	Systèmes mélangeants	18
2.3	Chaos, sensibilité aux conditions initiales	20
2.4	Entropie topologique et chaos	21
2.4.1	Définition	21
2.4.2	Calculs d'entropie	25
3	Croissance des orbites et entropie topologique	30
3.1	Cas des systèmes de Markov	30
3.2	Cas de la cat-map	32
3.2.1	Une preuve algébrique	33
3.2.2	Une preuve « à la Margulis »	35
	Remarques conclusives	45
	Références	45

*Rapport de stage de L3

[†]encadrée par Martin Mion-Mouton (Aix-Marseille Université). Merci pour le stage enrichissant et l'accueil chaleureux!

Table des figures

1	Le cercle $\mathbb{T}^1$ comme « enroulement » de l'intervalle $[0, 1[$ [HK03]	4
2	Action de la shift-map	8
3	Représentation d'une chaîne de Markov topologique par un graphe.	10
4	Classes d'équivalence et domaine fondamental de $\mathbb{T}^2$	13
5	Le 2-tore comme « donut » [HK03]	13
6	Illustration de la cat-map par V.I. Arnold dans [AA89], où le système a été introduit.	15
7	$\pi(x + [0, T]_{V_\lambda})$ pour $x = (1/4, 1/4)$ et $T = 25$.	17
8	Illustration de la sensibilité aux conditions initiales de la cat-map.	21
9	Illustration de la distance d_n , $n = 4$	22
10	Inscription de $[0, 1]^2$ dans un rectangle porté par E_λ et $E_{\lambda^{-1}}$	29
11	Il y a cinq points de période 2, correspondant aux cinq points entiers de $(A^2 - I_2)([0, 1]^2)$.	34
12	Inscription d'un triangle entier quelconque dans un rectangle entier.	34
13	Pré-image de $R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h) \cap \pi^{-1}(R_2)$ par π	36
14	Les huit possibilités d'intersections non pleines	37
15	$A^n(C) \subset A^n(R)$, donc les dimensions de $A^n(C)$ forcent que $A^n(C) \cap C$ est un rectangle propre plein.	38
16	Illustration de la preuve du lemme 3.17.	44

1 Systèmes dynamiques

On commence par introduire les généralités concernant les systèmes dynamiques. Ensuite, trois exemples de (classes de) systèmes dynamiques sont introduits : les rotations du cercle, les systèmes de Markov (shift-map, chaînes de Markov topologiques), les automorphismes toraux hyperboliques. Les deux dernières classes sont plus « compliquées » que la première, dans un sens que nous pourrions explorer plus loin.

1.1 Généralités

Définition 1.1: Système dynamique

Un *système dynamique* est la donnée d'un triplet $(X, \mathcal{T}, \varphi)$ où

- X est un ensemble
- $\mathcal{T}$ est le groupe additif $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou le monoïde $\mathbb{N}$
- φ une fonction $X \times \mathcal{T} \rightarrow X$

vérifient la condition suivante :

$$\forall x \in X, \forall t, s \in \mathcal{T}, \quad \varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s) \text{ et } \varphi(x, 0) = x.$$

Avec les mots, c'est un système décrit dans un ensemble X qui évolue dans le temps $t \in \mathcal{T}$ avec une évolution, décrite par φ , qui ne dépend pas du temps ($\varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s)$).

Si $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ alors on parle de *flot* (on sait que l'on peut obtenir un flot à partir d'une équation différentielle ordinaire sous certaines conditions). Si $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ alors on a un système *discret*. Ces derniers se ramènent à la donnée de (X, f) avec $f : X \rightarrow X$, en posant

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathcal{T}, \varphi(x, n) = f^n(x).$$

Nous nous intéresserons uniquement à des systèmes dynamiques discrets dans le reste de ce rapport.

Définition 1.2: Système dynamique discret

Un système dynamique *discret* est la donnée d'un couple (X, f) où X est un ensemble, f une fonction $X \rightarrow X$. Si f est une bijection alors c'est un système *inversible*.

Il est commun d'imposer à X et à f des propriétés structurelles. Par exemple :

- X est un espace mesuré et f est mesurable (*théorie ergodique*)

- X est un espace métrique (ou topologique) et f est continue (*dynamique topologique*)
- X est une variété différentielle et f est différentiable (*système différentiel*).

Pour étudier un système dynamique, il est utile d'inspecter ses *orbites*.

Définition 1.3: Orbite, périodicité

Soit (X, f) un système dynamique discret. Soit $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ s'il est inversible, $\mathbb{N}$ sinon. Soit $x \in X$.

- L'*orbite* de x est l'ensemble

$$\mathcal{O}(x) := \{f^n(x) : n \in \mathcal{T}\} \subset X.$$

- x est *périodique* s'il existe $n > 0$ tel que $f^n(x) = x$. Alors n est une *période* de x , $\inf\{n > 0 : f^n(x) = x\}$ est la *plus petite période* de x et $\mathcal{O}(x)$ est une *orbite périodique*.
- x est un *point fixe* si $\mathcal{O}(x) = \{x\}$.

Remarque

Dans un système discret, dire que x est de période n signifie que sa plus petite période est un diviseur de n .

1.2 Rotations du cercle

Les rotations du cercle sont un des exemples les plus simples de systèmes dynamiques qui ont un comportement qui n'est pas entièrement périodique.

Définition 1.4: Cercle topologique

Le *cercle topologique* (ou 1-tore) est l'ensemble $\mathbb{T}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (le groupe quotient de $(\mathbb{R}, +)$ par $(\mathbb{Z}, +)$). On notera $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la classe d'un élément $x \in \mathbb{R}$.

Comme chaque classe d'équivalence de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a un unique représentant dans $[0, 1[$, on peut identifier $\mathbb{T}^1$ à $[0, 1[$. On pose, pour $x, y \in \mathbb{T}^1$:

$$d_{\mathbb{T}^1}(x, y) = \inf\{|a - b| : a \in x, b \in y\}$$

(on notera simplement $d(x, y)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Lemme 1.5

- Si $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$d([x], [y]) = \min\{|x - \tilde{y}| : \tilde{y} \in [y]\}$$

- $d_{\mathbb{T}^1}$ est une distance sur $\mathbb{T}^1$.

- Si $x, y \in [0, 1[$, alors

$$d([x], [y]) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } |x - y| \leq 1/2 \\ 1 - |x - y| & \text{si } |x - y| \geq 1/2 \end{cases}$$

Preuve du lemme.

- Soit $\hat{y} \in [y]$ minimisant $|x - \hat{y}|$. Par définition,

$$d([x], [y]) \leq |x - \hat{y}|.$$

Soient $a \in [x]$ et $b \in [y]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = x + k$. Donc $|a - b| = |x - (b - k)| \geq |x - \hat{y}|$, d'où $d([x], [y]) \geq |x - \hat{y}|$. Donc

$$d([x], [y]) = |x - \hat{y}|.$$

- La symétrie est évidente. Selon le point précédent, $d_{\mathbb{T}^1}([x], [y]) = 0 \implies \exists \tilde{y} \in [y], |x - \tilde{y}| = 0 \implies [y] = [x]$.

Enfin, soient $x, y, z \in \mathbb{T}^1$, soient $a \in x$ et $b \in y$ tels que

$$d(x, y) = |a - b|.$$

Pour tout $c \in [z]$,

$$d(x, z) \leq |a - c| \leq |a - b| + |b - c| = d(x, y) + |b - c|$$

donc

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

— Si $|x - y| \leq 1/2$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$|x - (y + k)| \geq |k| - |x - y| \geq 1 - 1/2 \geq |x - y|$$

donc $|x - y|$ est bien le minimum définissant $d([x], [y])$, d'où $d([x], [y]) = |x - y|$.

Si $|x - y| \geq 1/2$ alors en supposant par exemple $x \geq y$, on a

$$1 - |x - y| = |x - (y + 1)| \leq 1/2$$

avec $y + 1 \in [y]$ donc selon ce qui précède $d([x], [y]) = 1 - |x - y|$.

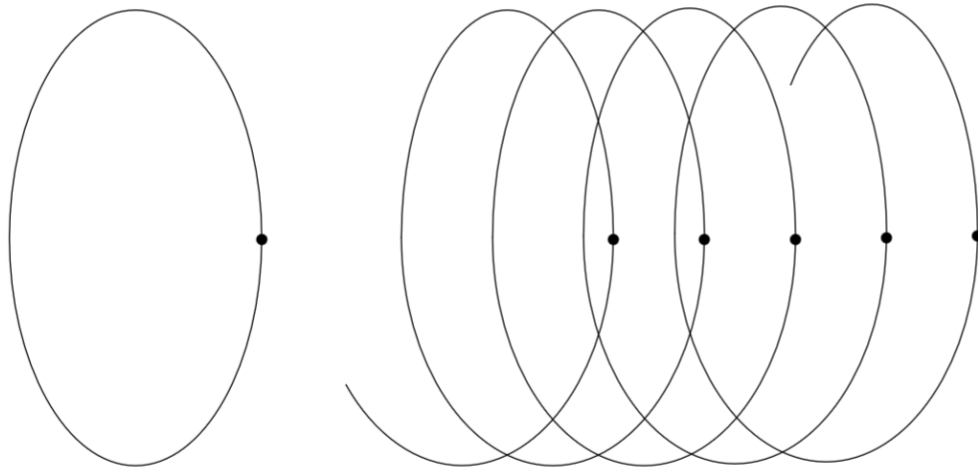


Figure 1 – Le cercle $\mathbb{T}^1$ comme « enroulement » de l'intervalle $[0,1[$ [HK03]

Ainsi, d est la distance sur $\mathbb{R}$ pour les classes de points de $[0,1[$ assez proches, et si $\varepsilon < 1/2$ alors

$$d([1 - \varepsilon], [0]) = \varepsilon,$$

c'est-à-dire que les classes des points proches de 1 sont également proches de 0. Avec cette distance, on peut ainsi voir $\mathbb{T}^1$ comme l'intervalle $[0,1[$ où l'on a raccroché les deux extrémités. Ceci justifie la dénomination de *cercle topologique* (figure 1). Cette relation peut être formalisée ainsi :

Proposition 1.6

$\mathbb{T}^1$ et le cercle unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sont homéomorphes. Notamment, $\mathbb{T}^1$ est compact.

Preuve de la proposition.

Il s'agit de relier l'intervalle $[0,1[$ à $\mathbb{U}$ par le biais d'une paramétrisation polaire.

L'application

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto e^{2i\pi\theta} \end{cases}$$

est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$ de noyau $\mathbb{Z}$ et d'image $\mathbb{U}$, il induit donc une bijection

$$\tilde{\psi} : \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{U}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x - y| \leq 1/2$, on a

$$|\tilde{\psi}([x]) - \tilde{\psi}([y])| = |e^{2i\pi x} - e^{2i\pi y}| = 2|\sin(\pi(x - y))| = 2\sin(\pi|x - y|).$$

Or pour tout $0 \leq t \leq \pi/2$ (inégalités de convexité) :

$$\frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$$

donc

$$4|x - y| \leq |\tilde{\psi}([x]) - \tilde{\psi}([y])| \leq 2\pi|x - y|.$$

Ceci montre que $\tilde{\psi}$ est un homéomorphisme. Comme $\mathbb{U}$ est compact (fermé borné en dimension finie), $\mathbb{T}^1$ aussi.

Remarque

La distance $d_{\mathbb{T}^1}$ est un cas particulier de *métrique riemannienne*. C'est un fait de la théorie générale (en géométrie différentielle) qu'elle confère bien à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la topologie quotient. Le fait que $\tilde{\psi}$ soit un homéomorphisme découle alors immédiatement du fait que ψ soit continue et que ses inverses locaux le sont aussi.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $T_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto [x + \alpha] \in \mathbb{T}^1$. On a

$$x - y \in \mathbb{Z} \implies (x + \alpha) - (y + \alpha) \in \mathbb{Z}$$

donc T_α se factorise en une application $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, R_\alpha([x]) = [x + \alpha].$$

Géométriquement, R_α représente la rotation d'un angle $2\pi\alpha$ sur le cercle. Il n'est pas difficile de voir que pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$R_\alpha^n([x]) = [x + n\alpha] = R_{n\alpha}([x]).$$

Définition 1.7: Rotation du cercle

La *rotation du cercle* d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ est le système dynamique (inversible discret) $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$ où $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ est l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, R_\alpha([x]) = [x + \alpha].$$

Proposition 1.8

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ est une isométrie.

Preuve de la proposition.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} d(R_\alpha([x]), R_\alpha([y])) &= d([x + \alpha], [y + \alpha]) \\ &= \inf\{|a - b| : a \in [x + \alpha], b \in [y + \alpha]\} \\ &= \inf\{|(a + \alpha) - (b + \alpha)| : a \in [x], b \in [y]\} \\ &= \inf\{|a - b| : a \in [x], b \in [y]\} = d([x], [y]). \end{aligned}$$

Les orbites de $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$ sont toutes de la même nature, et celle-ci dépend d'un critère de rationalité ou d'irrationalité de α :

Théorème 1.9: Orbites des rotations du cercle

Les orbites d'une rotation du cercle suivent la dichotomie suivante :

- Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux) alors tous les points de $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$ sont périodiques de même plus petite période q .
- Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ alors toutes les orbites de $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$ sont denses dans $\mathbb{T}^1$.

Preuve. — Supposons $\alpha = \frac{p}{q}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$R_\alpha^q([x]) = [x + q\frac{p}{q}] = [x + p] \underset{p \in \mathbb{Z}}{=} [x]$$

d'où x périodique de période q . C'est bien la plus petite car si $R_\alpha^n([x]) = [x]$, $n > 0$, alors $n\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ donc q divise np , donc comme p et q sont premiers entre eux, q divise n .

- La preuve fait intervenir un résultat classique de théorie des nombres : un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène est nécessairement dense.

- Considérons $G = \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. C'est bien un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et il n'est pas monogène : par l'absurde, si $G = \beta\mathbb{Z}$ alors il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tel que $G \ni 1 = k\beta$ et $G \ni \alpha = \ell\beta$ et on aurait que $k \neq 0$ et $\alpha = \ell/k \in \mathbb{Q}$. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons que $[y]$ est limite d'une suite de $\mathcal{O}([x])$ dans $\mathbb{T}^1$. Il existe par densité de G dans $\mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ tel que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y - x$. Écrivons $y_n = k_n\alpha + \ell_n$, $k_n, \ell_n \in \mathbb{Z}$, pour tout n . Soit la suite $(a_n)_n := ([y_n + x])_n = ([x + k_n\alpha])_n \subset \mathcal{O}([x])$.

On a

$$d([a_n], [y]) = d([y_n + x], [y]) \leq |(y_n + x) - y| = |y_n - (y - x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc $[y]$ est la limite de $(a_n)_n$.

□

Les orbites denses vérifient une propriété d'*équidistribution*. Ce résultat sera utile pour démontrer le théorème 3.3.

Proposition 1.10

Soit une rotation $(\mathbb{T}^1, R)$ avec $R = R_\alpha$ d'angle α irrationnel. Soient $0 < \varepsilon \ll \ell \leq 1$. Il existe $N = N(\varepsilon, \ell) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $[x] \in \mathbb{T}^1$, $I \subset \mathbb{T}^2$ intervalle de longueur $\geq \ell$, si $C([x], I, n) = |\{k \in \{0, \dots, n-1\} : R^k([x]) \in I\}|$, alors

$$\text{long}(I) - \varepsilon \leq \frac{C([x], I, n)}{n} \leq \text{long}(I) + \varepsilon.$$

Preuve de la proposition.

On commence par constater que, comme R est une isométrie, et l'intégrale ci-dessous a un sens car I se plonge dans $[0, 1[$:

$$\int_0^1 \frac{C([x], I, n)}{n} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_0^1 \mathbf{1}_{R^k([x]) \in I} dx}_{=\text{long}(R^{-k}(I))=\text{long}(I)} = \text{long}(I).$$

Donc, si $[x_{\max}]$ maximise $C(\cdot, I, n) : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{N}$, alors

$$\frac{C([x_{\max}], I, n)}{n} \geq \int_0^1 \frac{C([x], I, n)}{n} dx = \text{long}(I)$$

(de même, on a l'autre sens de l'inégalité si $x_{\min}$ minimise $C(\cdot, I, n)$).

L'objectif est alors de minorer (resp. majorer) tous les $C([x], I, n)$ par une quantité faisant intervenir un $C([x_{\max}], I', n')$ (resp. $C([x_{\min}], I'', n'')$), I', I'', n' et n'' à déterminer, à une erreur uniforme ε près.

Fixons $[x] \in \mathbb{T}^1$. Son orbite est dense, chaque $[x'] \in \mathbb{T}^1$ est $\varepsilon/4$ -proche d'un $R^k([x])$, $k \in \mathbb{N}$. Par compacité de

$\mathbb{T}^1$, on a alors l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tout $[x'] \in \mathbb{T}^1$ est $\varepsilon/4$ -proche d'un $R^k([x])$, $k \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$. On suppose $n \geq n_0$ et $I = \pi([a, b])$ avec $b - a \geq \ell$, $0 \leq a \leq b \leq 1$.

- On pose $I' = \pi([a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2]) \subset I$, $n' = n - n_0$. Soit $[x_{\max}] \in \mathbb{T}^1$ maximisant $C(\cdot, I', n')$. Il existe $k \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$ tel que $d([x_{\max}], R^k([x])) \leq \varepsilon/4$. Comme R est une isométrie, on a pour tout $j \in \{0, \dots, n' - 1\}$, $d(R^j([x_{\max}]), R^{k+j}([x])) \leq \varepsilon/4$ donc

$$\forall j = 0, \dots, n' - 1, \quad R^j([x_{\max}]) \in I' \implies R^{k+j}([x]) \in I, \quad k + j \in \{0, \dots, n - 1\}.$$

Ainsi

$$(n - n_0)(\text{long}(I) - \varepsilon) \leq C([x_{\max}], I', n') \leq C([x], I, n).$$

- En posant $I'' = \pi([a - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2]) \supset I$, $n'' = n_0 + n$, $[x_{\min}] \in \mathbb{T}^1$ minimisant $C(\cdot, I'', n'')$, et $k' \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$ tel que $d([x_{\min}], R^{k'}([x])) \leq \varepsilon/4$, on a également

$$\forall j = 0, \dots, n - 1, \quad d(R^{j-k'}([x_{\min}]), R^j([x])) \leq \varepsilon/4, \quad j - k' \in \{0, \dots, n'' - 1\}$$

donc

$$C([x], I, n) \leq C([x_{\min}], I'', n'') \leq (n_0 + n)(\text{long}(I) + \varepsilon).$$

Au final

$$(n - n_0)(\text{long}(I) - \varepsilon) \leq C([x], I, n) \leq (n_0 + n)(\text{long}(I) + \varepsilon)$$

donc

$$\text{long}(I) - \frac{n_0}{n}(1 + \varepsilon) \leq \frac{C([x], I, n)}{n} \leq \text{long}(I) + \frac{n_0}{n}(1 + \varepsilon).$$

Comme $\frac{n_0}{n}(1 + \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a la conclusion voulue.

1.3 Systèmes symboliques (de Markov)

1.3.1 Shift-map, chaînes de Markov topologiques

Les systèmes dynamiques présentés ci-dessous ont l'avantage de faire intervenir des objets « symboliques ». Leur manipulation, plus simple, facilite l'étude du système.

On définit

$$\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \quad \Sigma_2^+ := \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$$

l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) prenant des valeurs 0 ou 1. Pour tout $x \in \Sigma_2$, on notera $x = (\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots)$.

Pour $x, y \in \Sigma_2$, on note $v(x, y) := \min\{|i| : i \in \mathbb{Z}, x_i \neq y_i\}$. On pose alors

$$d_{\Sigma_2}(x, y) := 2^{-v(x, y)}$$

simplement noté d si il n'y a pas d'ambiguïté¹.

Proposition 1.11

d_{Σ_2} est une distance sur Σ_2 , munissant Σ_2 d'une structure d'espace métrique compact.

Preuve de la proposition.

Par définition, d est évidemment symétrique et positive. On a le caractère défini car $d(x, y) = 0$ si et seulement si $\forall i \in \mathbb{Z}, x_i = y_i$, i.e. $x = y$.

Montrons l'inégalité triangulaire : soient $x, y, z \in \Sigma_2$. Soit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i \neq y_i$.

- Si $x_i \neq z_i$, alors $|i| \geq v(x, z)$, donc $2^{-|i|} \leq 2^{-v(x, z)} = d(x, z) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

- Si $y_i \neq z_i$, alors pour les mêmes raisons, $2^{-|i|} \leq d(x, z) + d(z, y)$.

- Le cas $x_i = z_i$ et $y_i = z_i$ est exclu car $x_i \neq y_i$.

1. On pose les conventions $\min \emptyset = +\infty$ et $2^{-\infty} = 0$.

Dans tous les cas, $2^{-|i|} \leq d(x, z) + d(y, z)$ et comme i est quelconque,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

Enfin, (Σ_2, d) est compact, car on a la propriété de Bolzano-Weierstrass. En effet, soit $\{x^k : k \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma_2$. On va en déduire une sous-suite convergente dans Σ_2 , avec un argument qui repose sur le principe des tiroirs (les valeurs prises par les suites de Σ_2 sont en nombre fini).

- Il existe une infinité de rangs k tels que les $(x^k)_0$ sont égaux deux-à-deux. On en déduit une extraction φ_0 telle que les $(x^{\varphi_0(k)})_0$, pour tout k , sont égaux deux-à-deux.
- Il existe une infinité de rangs k tels que les couples $((x^{\varphi_0(k)})_{-1}, (x^{\varphi_0(k)})_1)$ sont égaux deux-à-deux. Soit φ_1 extraction (de la forme $\varphi_0 \circ \psi$) telle que les $(x^{\varphi_1(k)})_{-1}$ (resp. $(x^{\varphi_1(k)})_1$), pour tout k , sont égaux deux-à-deux. On conserve aussi que tous les $(x^{\varphi_1(k)})_0$ sont égaux deux-à-deux.
- Il existe une infinité de rangs k tels que les couples $((x^{\varphi_0(k)})_{-2}, (x^{\varphi_0(k)})_2)$ sont égaux deux-à-deux. Soit φ_2 extraction (de la forme $\varphi_1 \circ \psi$) telle que les $(x^{\varphi_2(k)})_{-2}$ (resp. $(x^{\varphi_2(k)})_2$), pour tout k , sont égaux deux-à-deux. On conserve aussi que tous les $(x^{\varphi_2(k)})_0$ (resp. $(x^{\varphi_2(k)})_{-1}$, $(x^{\varphi_2(k)})_1$) sont égaux deux-à-deux.
- On continue ainsi par récurrence...

On finit par obtenir une extraction φ telle que $\{x^{\varphi(k)} : k \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma_2$ est constante, elle est donc convergente dans Σ_2 . ■

Définition 1.12: Shift-map

La *shift-map* inversible (resp. non-inversible) est le système dynamique (discret) (Σ_2, σ) (resp. (Σ_2^+, σ)) où $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ (resp. $\Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$) est défini par

$$x = (x_i)_i \mapsto (x_{i+1})_i.$$

L'action de σ consiste, en visualisant un élément de Σ_2 comme un ruban infini étiqueté de 0 ou de 1, à décaler le ruban d'un cran vers la gauche (figure 2).

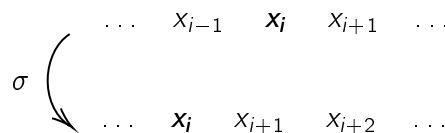


Figure 2 – Action de la shift-map

Proposition 1.13

L'application $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ est continue.

Preuve de la proposition.

Soient $x, y \in \Sigma_2$. Soit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i \neq y_i$. Ceci se réécrit $x_{i+1} \neq y_{i+1}$, donc

$$v(x, y) \leq |i + 1|$$

d'où

$$d(x, y) \geq 2^{-|i+1|} \geq 2^{-|i|-1}.$$

On en déduit

$$d(x, y) \geq 2^{-1} d(\sigma(x), \sigma(y))$$

i.e.

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq 2d(x, y).$$

Ceci établit que σ est Lipschitz, donc continue. ■

Le résultat suivant est utile pour les manipulations d'ordre topologique sur l'espace Σ_2 .

Proposition 1.14: Boules fermées de Σ_2

Soient $k \in \mathbb{N}$, $x \in \Sigma_2$. On pose

$$U_{x_{-k}, \dots, x_k} := \{y \in \Sigma_2 : (x_{-k}, \dots, x_k) = (y_{-k}, \dots, y_k)\}.$$

Alors $U_{x_{-k}, \dots, x_k}$ est la boule fermée de Σ_2 centrée en x et de rayon $2^{-(k+1)}$ pour la distance d .

Preuve de la proposition.

Pour $y \in U_{x_{-k}, \dots, x_k}$ on a $v(x, y) \geq k + 1$, d'où

$$d(x, y) \leq 2^{-(k+1)}$$

et inversement, si $y \notin U_{x_{-k}, \dots, x_k}$ alors $v(x, y) \leq k$ donc

$$d(x, y) \geq 2^{-k} > 2^{-(k+1)}.$$

On peut introduire une famille de systèmes symboliques généralisant la shift-map.

Définition 1.15: Chaînes de Markov topologiques

Soit $N \geq 2$ entier. On pose $\Sigma_N := \{0, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$ et $\Sigma_N^+ := \{0, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}}$, puis pour tout $x \in \Sigma_N$ (resp. Σ_N^+) :

$$\sigma((x_i)_i) := (x_{i+1})_i.$$

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ dont les coefficients sont dans $\{0,1\}$. On pose l'ensemble invariant par σ :

$$\Sigma_M = \{x \in \Sigma_N : \forall i \in \mathbb{Z}, m_{x_i, x_{i+1}} = 1\}.$$

Alors la *chaîne de Markov topologique* associée à M est le système (Σ_M, σ_M) , où σ_M est la restriction de σ à Σ_M .

Si il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que M^m a tous ses coefficients non-nuls, alors on dit que M est *transitive*.

Remarque

La shift-map est un cas particulier de la chaîne de Markov topologique issue d'une matrice transitive, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 0 et 2.

Une matrice M de taille $N \times N$ à coefficients dans $\{0,1\}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe G_M à N sommets (figure 3). L'ensemble des éléments de Σ_M correspond aux chemins infinis à gauche et à droite, avec un point d'origine mis en évidence, qui sont valides dans ce graphe. Un point périodique de Σ_M correspond à un chemin qui répète indéfiniment une même boucle.

Les propriétés algébriques de la matrice M reflètent les propriétés du système (Σ_M, σ_M) , comme en témoignent les exemples suivants, qui facilitent l'étude des chaînes de Markov topologiques.

Proposition 1.16

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \subset \{0,1\}^{N \times N}$. Soient $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$ et $m \in \mathbb{N}$. Le nombre $N_{i,j}^m$ d'éléments x de Σ_M tels que $x_0 = i$ et $x_m = j$ est égal à $[M^m]_{i+1,j+1}$, le coefficient $(i+1, j+1)$ de M^m .

Preuve de la proposition.

Soit G_M un graphe de sommets $x_1, \dots, x_N$ et de matrice d'adjacence M (i.e. x_k et x_ℓ sont adjacents si et seulement si $m_{k,\ell} = 1$). Le résultat revient à compter le nombre de chemins possibles de sommet initial x_i et de sommet final x_j , de longueur $m+1$.

On procède par récurrence sur m . Le cas $m = 0$ est immédiat. Pour l'hérédité, il faut montrer que

$$N_{i,j}^{m+1} = \sum_{k=1}^N N_{i,k}^m m_{k,j}.$$

Or, chaque chemin de G_M de longueur $m+2$, de sommet initial x_i et de sommet final x_j , termine en un sommet x_k , $k = 1, \dots, N$ après une distance $m+1$, à condition que $m_{k,j} = 1$. On retrouve bien la somme ci-dessus. ■

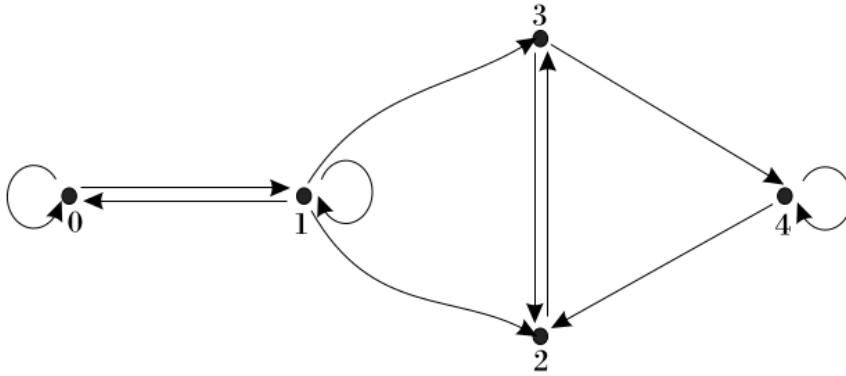


Figure 3 – Représentation d'une chaîne de Markov topologique par un graphe.

Le graphe G_M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [HK03]

Corollaire 1.17

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \subset \{0,1\}^{N \times N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système (Σ_M, σ_M) possède $\text{tr}(M^n)$ points de période n .

Preuve du corollaire.

Dire que $\sigma_M^n(x) = x$ revient à dire que $x_n = x_0$. Avec les notations de la proposition précédente, il y a donc

$$\sum_{k=0}^{N-1} N_{k,k}^n = \sum_{k=1}^N [M^n]_{k,k} = \text{tr}(M^n)$$

points de période n . ■

1.3.2 Encodage de la doubling map, partition de Markov

La shift-map peut être étudiée en elle-même, mais elle sert aussi à étudier d'autres systèmes à travers la notion d'encodage. Un exemple simple concerne le système suivant :

Définition 1.18: Doubling map

La *doubling map* est le système dynamique (inversible discret) $(\mathbb{T}^1, E_2)$ où $E_2 : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, E_2([x]) = [2x].$$

Remarque

L'application $E_2 : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ est bien définie car $x - y \in \mathbb{Z} \implies 2x - 2y = 2(x - y) \in \mathbb{Z}$.

La doubling map s'identifie à la shift-map non-inversible par le biais de l'identification

$$\varphi : \begin{cases} \Sigma_2^+ & \longrightarrow \mathbb{T}^1 \\ (x_i)_i & \longmapsto [\sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}] \end{cases}$$

qui est surjective et injective en retirant à Σ_2^+ l'ensemble des suites stationnaires sur 1 (qui est dénombrable). Alors le diagramme suivant commute, et justifie que l'on peut « passer » de (Σ_2^+, σ) à $(\mathbb{T}^1, E_2)$ grâce à φ :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2^+ \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{E_2} & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

$$(\text{en effet, si } x \in \Sigma_2, \text{ alors } \varphi(\sigma(x)) = [\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(x)_i 2^{-i}] = \left[2 \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}}_{\in \varphi(x)} - \underbrace{2x_0}_{\in \mathbb{Z}} \right] = E_2(\varphi(x))).$$

Dans une telle situation où on dispose de φ une surjection continue qui respecte les fonctions définissant les systèmes, on parle de *semi-conjugaison*. Si l'on avait un homéomorphisme, ce serait une *conjugaison*.

Remarque

Ici, φ ne peut pas être un homéomorphisme, puisque Σ_2^+ (privée des suites stationnaires sur 1) et $\mathbb{T}^1$ ne sont pas homéomorphes (le premier espace est homéomorphe au Cantor triadique, qui n'est pas homéomorphe à $\mathbb{T}^1$). Cependant, on peut vérifier que pour $x, y \in \Sigma_2^+$,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{T}^1}(\varphi(x), \varphi(y)) &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} y_i 2^{-i} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| 2^{-i} = 2^{-v(x,y)} + \sum_{i=v(x,y)+1}^{\infty} 2^{-i} \\ &\leq 2 \cdot 2^{-v(x,y)} = 2 d_{\Sigma_2}(x, y). \end{aligned}$$

Nous verrons que cette relation permettra tout de même de relier les caractères chaotiques (qui sont de l'ordre topologique) de (Σ_2^+, σ) et $(\mathbb{T}^1, E_2)$ entre eux.

On ne dispose pas d'inégalité similaire dans le sens inverse : si on considère $x = (1, 0, \dots)$ et $y^k = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots)$, alors on a

$$d_{\mathbb{T}^1}(\varphi(x), \varphi(y)) = 2^{1-k} d_{\Sigma_2}(x, y)$$

avec $2^{1-k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$.

En général, l'*encodage* d'un système (X, f) consiste à considérer une partition (dite *de Markov*) $P_1, \dots, P_N$ de X faire une correspondance

$$x \in X \mapsto \tilde{x} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$$

en posant $\tilde{x}$ tel que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad f^i(x) \in P_{\tilde{x}_i}.$$

Ceci permet de ramener l'étude d'un système (X, f) à l'étude d'un système symbolique $(\{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$.

Exemple

Par exemple, la partition considérée pour $(\mathbb{T}^1, E_2)$ est $P_0 = \pi([0, 1/2[)$, $P_1 = \pi([1/2, 1[)$. On voit en effet que pour $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$, avec $(x_i)_i$ non stationnaire sur 1 :

— si $x_1 = 0$, alors

$$x = \frac{0}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} x_i 2^{-i} < \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2}$$

(l'inégalité est stricte car $(x_i)_i$ est non stationnaire sur 1)

— si $x_1 = 1$ alors

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} x_i 2^{-i} \geq \frac{1}{2}.$$

Donc on a bien

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E_2^k([x]) = [2^k x] = \left[\sum_{i=1}^{\infty} x_{i-k} 2^{-i} \right] \in P_{x_k}.$$

1.4 Un système toral hyperbolique : la cat-map d'Arnold

La *cat-map* d'Arnold est un exemple de système *hyperbolique*. Il se situe sur le *tore* $\mathbb{T}^2$. On parle ainsi de *système toral hyperbolique*.

Définition 1.19: 2-tore

Le 2-tore est l'espace quotient $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. On pourra l'identifier à son *domaine fondamental* $[0, 1]^2$. On note $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ la projection canonique. La classe de $x \in \mathbb{R}^2$ est notée $[x] \in \mathbb{T}^2$.

On munit $\mathbb{T}^2$ de (ce qui s'avère être une distance) :

$$\forall x, y \in \mathbb{T}^2, \quad d_{\mathbb{T}^2}(x, y) = \inf \{ \|a - b\|_2 : a \in x, b \in y \}$$

de manière similaire à $\mathbb{T}^1$, avec $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle. On la notera simplement d s'il n'y a pas d'ambiguïté. Elle correspond à la distance euclidienne pour les classes de points de $[0, 1]^2$ suffisamment rapprochés et se comporte encore comme si on avait « raccordé » les côtés opposés du carré $[0, 1]^2$ entre eux.

On peut aussi remarquer que $\mathbb{T}^2$ s'identifie à $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ par la bijection (qui s'avère être un homéomorphisme) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \\ [(x, y)] & \longmapsto & ([x], [y]) \end{array}$$

Lemme 1.20

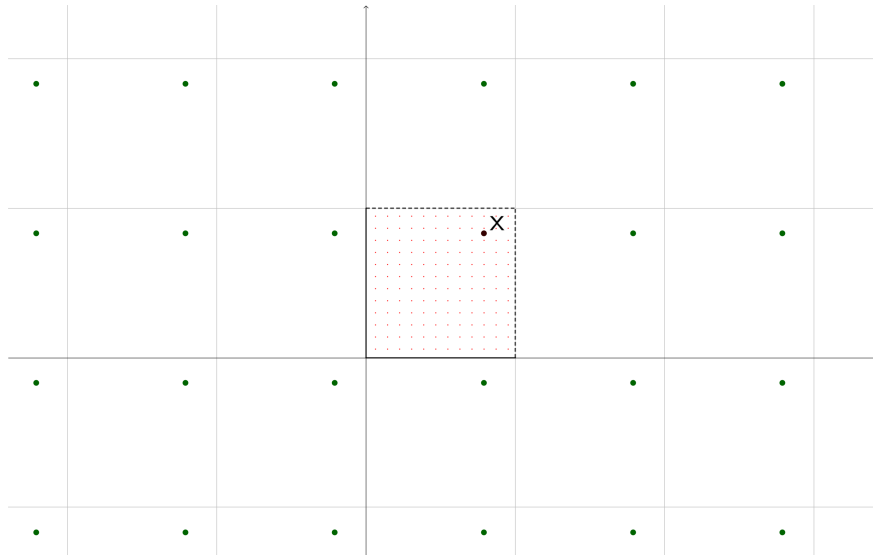
On a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad d_{\mathbb{T}^2}([x], [y]) = \sqrt{d_{\mathbb{T}^1}([x_1], [y_1])^2 + d_{\mathbb{T}^1}([x_2], [y_2])^2}.$$

Par conséquent

- $d_{\mathbb{T}^2}$ est bien une distance ;
- l'application ci-dessus est un homéomorphisme ;
- $\mathbb{T}^2$ est un espace compact.

Preuve du lemme.

Figure 4 – Classes d'équivalence et domaine fondamental de $\mathbb{T}^2$

On a vu que la borne inférieure définissant $d_{\mathbb{T}^1}$ est toujours atteinte. Soient $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a_i \in [x_i]$, $b_i \in [y_i]$ et

$$d_{\mathbb{T}^1}([x_1], [y_1]) = |a_1 - b_1|, \quad d_{\mathbb{T}^1}([x_2], [y_2]) = |a_2 - b_2|.$$

Alors la quantité

$$\sqrt{d_{\mathbb{T}^1}([x_1], [y_1])^2 + d_{\mathbb{T}^1}([x_2], [y_2])^2} = \|a - b\|_2$$

est minimisée et on a $a \in [x]$, $b \in [y]$.

On en déduit facilement que $d_{\mathbb{T}^2}$ vérifie les propriétés d'une distance. Cette expression convient aussi comme distance produit sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ induite par $d_{\mathbb{T}^1}$, ceci montre qu'on a bien un homéomorphisme. Enfin, $\mathbb{T}^1$ est compact (selon la proposition 1.6) donc $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ aussi. ■

En visualisant l'identification des extrémités du domaine fondamental dans la construction du 2-tore, on obtient la représentation classique du 2-tore $\mathbb{T}^2$ comme bouée (ou donut pour les gourmands) (figure 5).

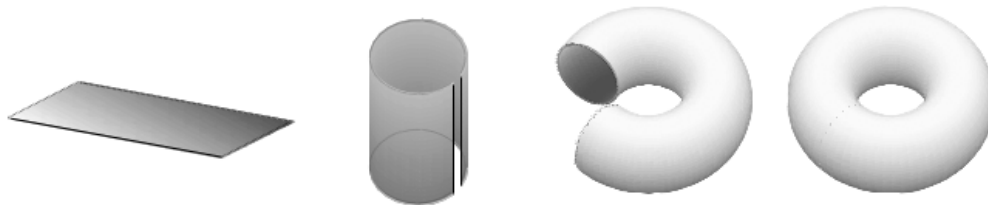


Figure 5 – Le 2-tore comme « donut » [HK03]

Lemme 1.21

Soit $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire dont la matrice (dans la base canonique) est à coefficients entiers. Alors B induit une application $B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, B([x]) = [B(x)].$$

De plus, B admet une application réciproque $B^{-1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ si et seulement si $\det B = \pm 1$.

Preuve du lemme.

Il suffit de vérifier que $x - y \in \mathbb{Z}^2 \implies B(x) - B(y) \in \mathbb{Z}^2$, mais c'est évident puisque B envoie $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$ comme sa matrice est à coefficients entiers. Pour le second point, la matrice de B^{-1} est à coefficients entiers si et seulement si $\det B = \pm 1$ (écrire la matrice de B^{-1} avec la formule de la comatrice). ■

On peut vérifier que la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

à coefficients entiers, a pour déterminant 1.

Définition 1.22: Cat-map d'Arnold

La *cat-map d'Arnold*^a est le système (inversible discret) $(\mathbb{T}^2, A)$ où $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ est définie par (et identifiée, dans la base canonique, à) la matrice symétrique

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

^a Vladimir Igoveritch Arnold (1937-2010), mathématicien soviétique puis russe (https://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Arnold)

Définition 1.23: Automorphisme toral hyperbolique

Une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ est *hyperbolique* si $\text{sp}(B) = \{\mu, \lambda\}$ avec

$$|\lambda| < 1 < |\mu|.$$

Si de plus B est à coefficients entiers et $\det B = \pm 1$ alors B induit un automorphisme de $\mathbb{T}^2$ que l'on appelle *automorphisme toral hyperbolique*.

La matrice A est diagonalisable avec deux valeurs propres distinctes $0 < \lambda^{-1} < 1 < \lambda$, où

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

A induit ainsi un automorphisme toral hyperbolique.

On note v_λ et $v_{\lambda^{-1}}$ les vecteurs propres correspondants, de sorte qu'elles forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (ils existent car A est symétrique) :

$$v_\lambda = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On note les espaces propres correspondants :

$$E_\lambda := \mathbb{R}v_\lambda, \quad E_{\lambda^{-1}} := \mathbb{R}v_{\lambda^{-1}}.$$

Remarque

La terminologie « hyperbolique » vient du fait que les trajectoires décrites sous l'action d'une matrice hyperbolique sont des hyperboles.

On s'intéresse dans le reste de cette section à une étude qualitative des orbites de $(\mathbb{T}^2, A)$.

Proposition 1.24

Soit $x \in \mathbb{T}^2$. x est périodique dans $(\mathbb{T}^2, A)$ si et seulement si un de (ou tous) ses représentants est à coefficients rationnels.

Preuve de la proposition.

On montre la double-implication.

$\Rightarrow$ Supposons $x \in \mathbb{T}^2$ périodique. On dispose de $n > 0$ tel que $A^n x = x$, i.e. si $y \in [x]$,

$$(A^n - I_2)y = A^n y - y =: m \in \mathbb{Z}^2.$$

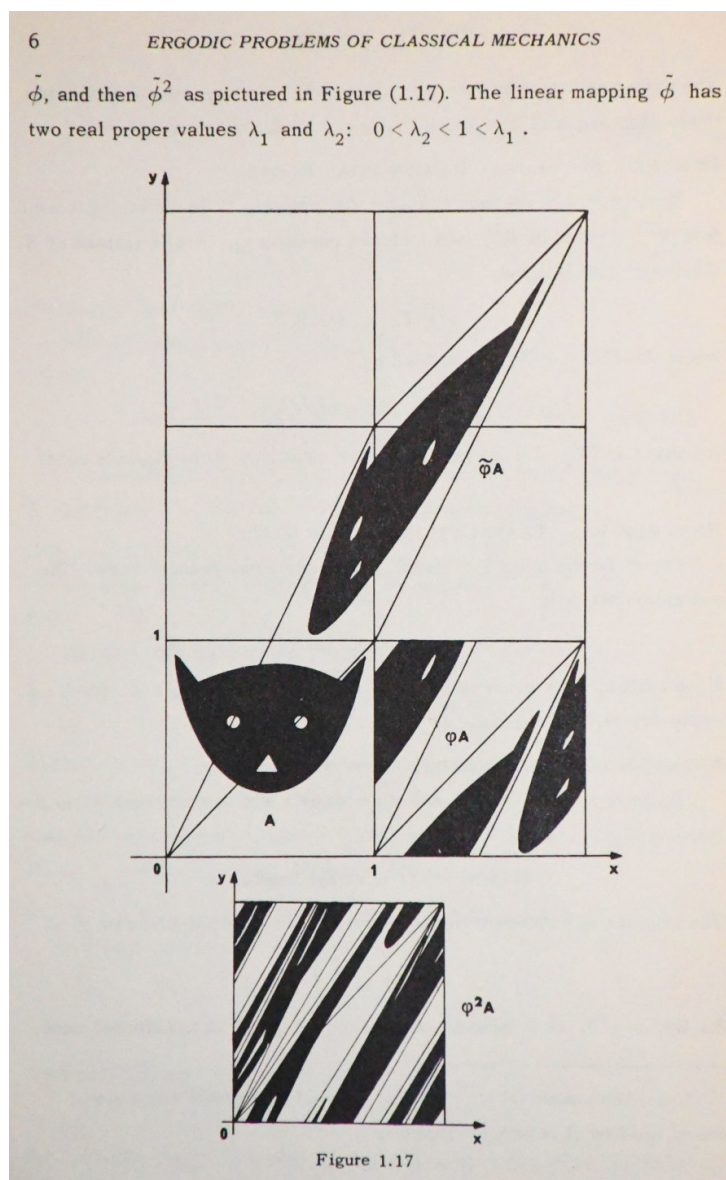


Figure 6 – Illustration de la cat-map par V.I. Arnold dans [AA89], où le système a été introduit. Le nom « cat-map » vient du chat qui figure dans l'illustration !

La matrice $A^n - I_2$ a pour valeurs propres $\lambda^n - 1$ et $\lambda^{-n} - 1$, toutes non-nulles, donc est inversible. Alors

$$y = (A^n - I_2)^{-1}m \in \mathbb{R}^2$$

est à coefficients rationnels car m est à coefficients entiers et $(A^n - I_2)^{-1}$ est à coefficients rationnels (comme inverse d'une matrice à coefficients entiers).

⇐ On suppose directement pour simplifier que $x \in [0,1]^2$ est à coefficients rationnels (c'est encore le cas de n'importe quel autre représentant de $[x]$). Montrons que $[x]$ est périodique. Écrivons

$$x = \begin{pmatrix} a/k \\ b/k \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n[x] = [A^n x]$ est représenté dans le domaine fondamental $[0,1]^2$ par un vecteur dont les coefficients sont rationnels avec le même dénominateur k . On peut ainsi définir une fonction

$$\mathbb{N} \longrightarrow \{0, \dots, k-1\}^2$$

en associant à $n \in \mathbb{N}$ les $(a_n, b_n) \in \{0, \dots, k-1\}^2$ tels que $A^n[x] = \begin{pmatrix} a_n/k \\ b_n/k \end{pmatrix}$. Pour des raisons de cardinal, cette fonction ne peut pas être injective (c'est le principe des tiroirs). Donc il existe $0 \leq n < m$ tels que $(a_n, b_n) = (a_m, b_m)$ d'où $A^n[x] = A^m[x]$, d'où $A^{m-n}[x] = [x]$. Donc $[x]$ est périodique.

Corollaire 1.25

L'ensemble des points périodiques de $(\mathbb{T}^2, A)$ est dense.

Preuve du corollaire.

Selon la proposition précédente, les points périodiques sont ceux qui ont un représentant à coefficients rationnels. Or, $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$, donc $\pi(\mathbb{Q}^2)$ est dense dans $\mathbb{T}^2$. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, avec $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \leq 1/2$,

$$d_{\mathbb{T}^2}(\pi(x), \pi(y)) = d_{\mathbb{T}^2}([x], [y]) = \|x - y\|_2$$

donc si $x \in \mathbb{R}^2$ et $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}^2$ tend vers x , alors $([x_n])_n \subset \pi(\mathbb{Q}^2)$ tend vers $[x]$.

Proposition 1.26

Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\pi(x + E_\lambda)$ est dense dans $\mathbb{T}^2$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour toute boule ouverte de rayon ε , $\pi(x + [0, T]E_\lambda)$ recoupe B .

Preuve de la proposition.

— Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ la pente de la droite $E_\lambda = \mathbb{R}(2, \sqrt{5}-1)$. Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$z := x + \frac{y_1 - x_1}{2} v_\lambda = (y_1, \underbrace{x_2 + (y_1 - x_1)/\alpha}_{=: z_2}) \in x + E_\lambda,$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$z + k v_\lambda = (y_1 + k, z_2 + k\alpha)$$

donc

$$[z + k v_\lambda] = [(y_1, R_\alpha^k([z_2]))].$$

Mais α est irrationnel donc l'orbite de $[z_2]$ par R_α est dense dans $\mathbb{T}^1$. Il existe donc $(k_\ell)_\ell \subset \mathbb{N}$ tel que $R_\alpha^{k_\ell}([z_2]) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} [y_2]$ dans $\mathbb{T}^1$. Alors dans $\mathbb{T}^2$,

$$[z + k_\ell v_\lambda] \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} [(y_1, y_2)],$$

avec $[z + k_\ell v_\lambda] \in \pi(x + E_\lambda)$.

Donc $\pi(x + E_\lambda)$ est bien dense dans $\mathbb{T}^2$.

- Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Par compacité de $\mathbb{T}^2$, on peut recouvrir $\mathbb{T}^2$ par un nombre fini $B_1, \dots, B_k$ de boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$, de sorte que toute boule ouverte B de rayon ε contienne un B_i . Il existe $T > 0$, selon ce qui précède, tel que $\pi(x + [0, T]E_\lambda)$ recoupe tous les B_i , $i = 1, \dots, k$. En effet, il existe T_1 tel que $\pi(x + [0, T_1]v_\lambda)$ recoupe B_1 en un point x_1 , puis $T_2 > T_1$ tel que $\pi(x_1 + [T_1, T_2 - T_1]v_\lambda)$ recoupe B_2 , donc $\pi(x + [0, T_2]v_\lambda)$ recoupe B_1 et B_2 , et ainsi de suite... Ceci donne la conclusion.

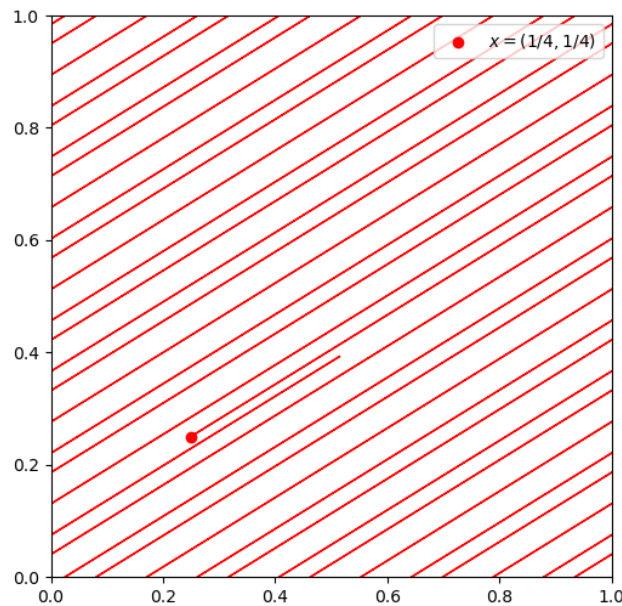


Figure 7 – $\pi(x + [0, T]v_\lambda)$ pour $x = (1/4, 1/4)$ et $T = 25$.

2 Complexité d'un système

On introduit dans cette section plusieurs critères qualitatifs et un critère qualitatif particulier (l'entropie topologique) qui permet d'identifier le niveau de complexité d'un système dynamique.

2.1 Transitivité topologique

Ce premier critère est assez faible, mais on peut l'observer dans tous les systèmes suffisamment complexes (par exemple un système périodique ne le vérifie pas). Il intervient aussi dans les autres critères que nous introduirons par la suite.

Définition 2.1: Transitivité topologique

Soit X un espace métrique, $f : X \rightarrow X$. Un système (X, f) est dit *topologiquement transitif* si il existe $x \in X$ tel que son orbite $\mathcal{O}(x)$ est dense dans X .

Exemple

- Les rotations irrationnelles du cercle sont topologiquement transitives (théorème 1.9).
- La suite «universelle» qui est la concaténation de toutes les suites finies dans $\{0,1\}$ (une quantité dénombrable), a une orbite dense dans Σ_2 . Donc (Σ_2, σ) est topologiquement transitive.

On dispose d'une caractérisation pratique de la transitivité topologique.

Proposition 2.2: Critère de transitivité topologique

Soit X un espace métrique, $f : X \rightarrow X$ continue bijective. Si (X, f) est topologiquement transitif, alors pour tous ouverts non vides U, V , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Si de plus X est séparable et complet, alors on a la réciproque.

Preuve de la proposition.

Si (X, f) est topologiquement transitif, soit $x \in X$ d'orbite dense. Pour U, V ouverts non vides, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $f^m(x) \in U$ (i.e. $x \in f^{-m}(U)$) et $f^n(x) \in V$, d'où $f^n(x) \in f^{n-m}(U) \cap V$.

Supposons maintenant X séparable complet et que pour tous ouverts non vides U, V , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. À partir d'une partie dénombrable dense $S \subset X$, on peut construire une suite $(U_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ décrivant l'ensemble des boules ouvertes centrées en chaque point de S et de rayon rationnel. On va montrer qu'il existe $x \in X$ et $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telle que $x \in f^{-N_i}(U_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui établira que x est un point d'orbite dense (car l'orbite rencontre alors n'importe quel ouvert non-vide de X).

- Par hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $f^{N_1}(U_0) \cap U_1 \neq \emptyset$. L'ouvert (par continuité de f) $U_0 \cap f^{-N_1}(U_1)$ est alors non-vide, il existe donc V_1 une boule ouverte de rayon $1/2$ telle que $\overline{V_1} \subset U_0 \cap f^{-N_1}(U_1)$.
- Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $f^{N_2}(V_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, pour les mêmes raisons on dispose de V_2 boule ouverte de rayon $1/4$ telle que $\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-N_2}(U_2) \subset \overline{V_1}$.
- En itérant la construction, on finit par trouver $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers et $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de boules ouvertes telles que $N_0 = 0$, $V_0 = U_0$, et pour tout $i > 0$, V_i est de rayon 2^{-i} , et

$$V_i \subset \overline{V_i} \subset V_{i-1} \cap f^{-N_i}(U_i) \subset \overline{V_{i-1}}.$$

Par complétude de X , la suite décroissante de boules fermées (donc de compacts) $(\overline{V_i})_{i \in \mathbb{N}}$ dont le rayon tend vers 0 a son intersection non-vide (réduite à un singleton). Soit x un élément de cette intersection. Alors par construction

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x \in f^{-N_i}(U_i),$$

ce qui conclut. ■

Dans la sous-section suivante, on introduit le caractère mélangeant d'un système (définitions 2.3 et 2.6), qui implique la transitivité topologique. On verra donc que les chaînes de Markov topologiques sous certaines conditions (qui incluent le système (Σ_2, σ)) et la cat-map $(\mathbb{T}^2, A)$ sont aussi topologiquement transitives.

2.2 Systèmes mélangeants

Le critère de transitivité topologique de la proposition 2.2 est une conséquence du critère suivant, plus contraignant :

Définition 2.3: Système topologiquement mélangeant

Soit X un espace métrique, $f : X \rightarrow X$ continue. On dit que (X, f) est un système topologiquement mélangeant si pour tous ouverts non-vides U, V , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Corollaire 2.4

Soit un système (X, f) sur un espace métrique séparable complet. Si (X, f) est topologiquement mélangeant alors il est topologiquement transitif.

Preuve du corollaire.

Le caractère topologiquement mélangeant implique le critère de de la proposition 2.2.

Ce critère permet déjà de différencier les rotations du cercle $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$ de (Σ_2, σ) et $(\mathbb{T}^2, A)$.

Proposition 2.5

- Aucune rotation du cercle n'est topologiquement mélangeante.
- La doubling map $(\mathbb{T}^1, E_2)$ est topologiquement mélangeante.
- Si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \subset \{0,1\}^{N \times N}$ est transitive (définition 1.15), alors la chaîne de Markov topologique (Σ_M, σ_M) est topologiquement mélangeante. Notamment, la shift-map (Σ_2, σ) est topologiquement mélangeante.
- La cat-map $(\mathbb{T}^2, A)$ est topologiquement mélangeante.

Preuve de la proposition.

- Pour une rotation rationnelle, toutes les orbites sont périodiques, le système n'est pas mélangeant. Pour une rotation irrationnelle $(\mathbb{T}^1, R)$, soient par exemple $U = \pi([0, 1/4[)$ et $V = \pi([0, 1/2[)$. L'orbite de $[0]$ est dense, donc il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $R^n([0]) \in \pi([1/2, 1[)$, d'où une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n(U) \cap V = \emptyset$ (puisque R est une isométrie donc $f^n(U)$ est un intervalle ouvert de longueur $1/4$).
- Soient I_1, I_2 intervalles ouverts de $\mathbb{T}^1$. Dans $\mathbb{R}$, si on note aussi $E_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$, alors pour n suffisamment grand, $E_2^n(\pi^{-1}(I_1)) \supset [0, 1[$, donc dans $\mathbb{T}^1$, $E_2^n(I_1) = \mathbb{T}^1$ d'où $E_2^n(I_1) \cap I_2 \neq \emptyset$.
- On se donne $U_{x_{-k}, \dots, x_k}$ et $U_{y_{-k}, \dots, y_k}$ telles que définies dans la proposition 1.14, avec $x_{-k}, \dots, x_k$ et $y_{-k}, \dots, y_k$ admissibles pour A (i.e. $m_{x_i, x_{i+1}} = m_{y_i, y_{i+1}} = 1$ pour tout $i = -k, \dots, k-1$). Il suffit de montrer que pour n suffisamment grand, $\sigma_M^n(U_{x_{-k}, \dots, x_k}) \cap U_{y_{-k}, \dots, y_k} \cap \Sigma_M \neq \emptyset$. Soit $n = 2k + 1 + m + \ell$, avec $\ell \geq 0$, où m est tel que M^m a tous ses coefficients non-nuls. On a $[M^{m+\ell}]_{x_k, y_{-k}} > 0$ donc selon la propriété 1.16 il existe un chemin admissible reliant x_k à y_{-k} en $m + \ell$ étapes. On dispose donc d'un chemin admissible de taille $2(2k + 1) + m + \ell$ qui commence par $x_{-k}, \dots, x_k$ et qui termine par $y_{-k}, \dots, y_k$. On peut l'étendre en une suite périodique, qui appartient alors bien à $\sigma_M^n(U_{x_{-k}, \dots, x_k}) \cap U_{y_{-k}, \dots, y_k} \cap \Sigma_M$.
- Soient U, V ouverts non-vides de $\mathbb{T}^2$. On fixe $x \in U$. Alors U contient une partie J de la projection $\pi(x + E_\lambda)$. Selon la proposition 1.26, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T \in \mathbb{R}^+$ tel que $\pi(x + [0, T]v_\lambda)$ intersecte toutes les boules de rayon ε . C'est encore le cas pour toutes les translations de $\pi(x + [0, T]v_\lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que V contienne une boule B de rayon ε . Pour n suffisamment grand, $A^n(J)$ contient $\pi(A^n(x) + [0, T]v_\lambda)$, donc intersecte B . Donc pour n suffisamment grand, $A^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Il existe une propriété plus forte que le caractère topologiquement mélangeant, qui fait intervenir une mesure sur l'espace du système.

Définition 2.6: Système μ -mélangeant

Soit X un espace métrique, μ une mesure borélienne sur X , $f : X \rightarrow X$ continue. On dit que (X, f) est un système μ -mélangeant (ou *mélangeant selon μ*) si pour tout borélien $B_1, B_2 \subset X$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^n(B_1) \cap B_2) = \mu(B_1)\mu(B_2).$$

Proposition 2.7: Systèmes topologiquement mélangeants

Tout système μ -mélangeant est topologiquement mélangeant.

Preuve de la proposition.

On fixe (X, f) un système μ -mélangeant. Soient U, V ouverts non-vides. Il existe $B_1 \subset U, B_2 \subset V$ des boules ouvertes non-vides, et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^n(B_1) \cap B_2) = \mu(B_1)\mu(B_2) > 0$$

donc pour n suffisamment grand, $\mu(f^n(B_1) \cap B_2) > 0$ d'où $f^n(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ d'où $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. ■

Remarque

- On peut restreindre la définition du caractère μ -mélangeant à des B_1, B_2 appartenant à une famille de boréliens qui peuvent être incluses dans n'importe quel ouvert, ceci conserve l'implication de la proposition précédente.
- Il y a une interprétation probabiliste au caractère μ -mélangeant : après un temps n grand sous l'action du système, tout choix d'évènements B_1 et B_2 deviennent indépendants.
- Le critère

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^n(B_1) \cap B_2) = \mu(B_1)\mu(B_2)$$

fait intervenir une quantité estimable géométriquement / combinatoirement à gauche, et une mesure à droite. Cette relation est un mécanisme fondamental dans la preuve du théorème 3.3.

On établit dans le théorème 3.12 que la cat-map est mélangeante selon l'aire (si l'on se restreint à une famille de parties, les *rectangles propres*). C'est cette propriété caractérisant une forme de complexité d'un système qui est fondamentale dans la preuve du théorème 3.3.

2.3 Chaos, sensibilité aux conditions initiales

Il n'y a pas de définition unanime du caractère chaotique d'un système. On suit ici celle introduite dans [HK03].

Définition 2.8: Chaos

Soit X un espace métrique et $f : X \rightarrow X$. Le système topologique (X, f) est *chaotique* si il est topologiquement transitif et que l'ensemble de ses points périodiques est dense dans X .

Proposition 2.9: Systèmes chaotiques

- Aucune rotation du cercle n'est chaotique
- La doubling map $(\mathbb{T}^1, E_2)$ est chaotique.
- Si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \subset \{0,1\}^{N \times N}$ est transitive (définition 1.15), alors la chaîne de Markov topologique (Σ_M, σ_M) est chaotique. Notamment, la shift-map (Σ_2, σ) est chaotique.
- La cat-map $(\mathbb{T}^2, A)$ est chaotique.

Preuve de la proposition.

Une rotation rationnelle n'est pas topologiquement mélangeante. Une rotation irrationnelle n'a pas de point périodique.

Pour le reste, on a déjà établi leur caractère mélangeant, donc topologiquement transitif. Dans les trois cas, l'ensemble des points périodiques est dense :

- Les points périodiques de la doubling map sont les points de la forme $[k/(2^n - 1)]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, car

$$E_2^n([x]) = [x] \iff [2^n x] = [x] \iff 2^n x - x \in \mathbb{Z} \iff x \in \frac{1}{2^n - 1} \mathbb{Z}.$$

- Une chaîne de Markov issue d'une matrice transitive M a son ensemble de points périodiques dense. En effet, montrons que pour tout $U_{x_{-k}, \dots, x_k}$ (proposition 1.14), avec $x_{-k}, \dots, x_k$ admissible pour M , on a $U_{x_{-k}, \dots, x_k} \cap \Sigma_M$ qui contient un élément périodique. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que M^m n'a pas de coefficient nul. On a $[M^m]_{x_k, x_{-k}} > 0$, donc il existe un chemin admissible reliant x_k à x_{-k} en m étapes. On obtient de ce chemin une suite périodique appartenant à $U_{x_{-k}, \dots, x_k} \cap \Sigma_M$.
- L'ensemble des points périodiques de $(\mathbb{T}^2, A)$ est dense (corollaire 1.25).

Une interprétation connue du chaos est la sensibilité aux conditions initiales.

Définition 2.10: Sensibilité aux conditions initiales

Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ continue. Le système topologique (X, f) est *sensible aux conditions initiales* si il existe $\Delta > 0$ (*constante de sensibilité*) tel que pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$d(x, y) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad d(f^n(x), f^n(y)) \geq \Delta.$$

Avec des mots, la définition exprime que pour toute erreur ε sur toute conditions initiale x , le système finit toujours par diverger d'une quantité Δ . Le fait que la quantité Δ est indépendante de x et ε est parfois appelée *effet papillon*. On admet la proposition suivante, dont la preuve est hors du cadre de cet exposé.

Proposition 2.11

Tout système chaotique présente une sensibilité aux conditions initiales.

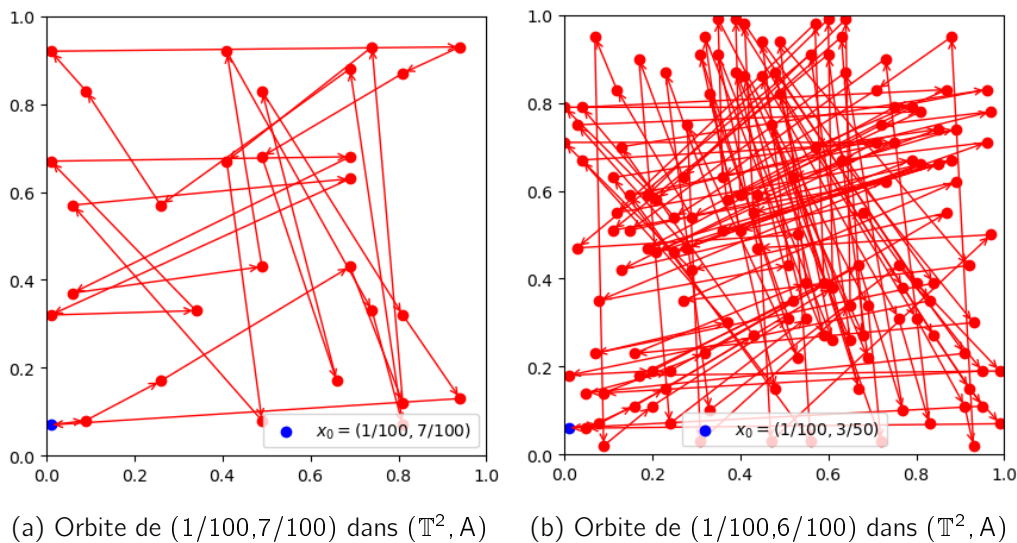


Figure 8 – Illustration de la sensibilité aux conditions initiales de la cat-map.

2.4 Entropie topologique et chaos

L'*entropie topologique* est une mesure quantitative du caractère chaotique d'un système. Cette grandeur quantifie la vitesse à laquelle, globalement, les orbites « s'éloignent » au fil du temps. Un système est dit chaotique dès que son entropie topologique est strictement positive. En général, le chaos d'un système se traduit par une entropie topologique strictement positive. Nous définissons la notion, puis l'illustrons sur les systèmes que nous avons introduits.

2.4.1 Définition

On présente d'office la définition de l'entropie topologique. Nous détaillerons et prouverons ensuite les éléments qui la constituent.

Définition 2.12: Entropie topologique

Soit (X, f) un système dynamique inversible discret, avec

- $(X, \mathcal{O})$ espace métrisable compact
- $f : X \rightarrow X$ continue.

On pose, pour toute distance d induisant la topologie $\mathcal{O}$,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n^f (ou d_n s'il n'y a pas d'ambiguïté) la distance sur X définie par

$$\forall x, y \in X, \quad d_n^f(x, y) = \max\{d(f^j(x), f^j(y)) : j = 0, \dots, n-1\}.$$

- $D_d(f, n, \varepsilon)$ le cardinal minimal d'un recouvrement ε -fin de X pour la distance d_n^f .

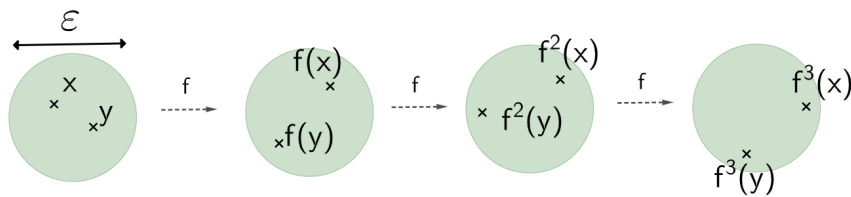
$$h_d(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln D_d(f, n, \varepsilon).$$

L'entropie topologique de (X, f) est définie par

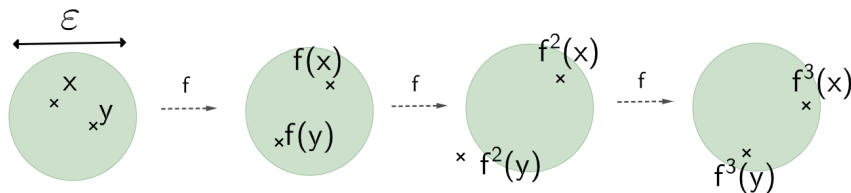
$$h_{\text{top}}(f) := h_d(f) \in [0, +\infty],$$

quantité bien définie car indépendante de d .

La quantité $d_n^f(x, y)$ est définie de sorte que $d_n^f(x, y) \leq \varepsilon$ si et seulement si les images successives des points x et y restent à distance $\varepsilon > 0$ durant chacune des n premières étapes. Elle mesure donc un rapprochement des orbites jusqu'à un temps imparti, considéré à instants successifs près (voir figure 9).



(a) $d_4(x, y) \leq \varepsilon$: après quatre mesures, on ne sait pas si $x \neq y$



(b) $d_4(x, y) > \varepsilon$: après quatre mesures, on sait que $x \neq y$

Figure 9 – Illustration de la distance d_n , $n = 4$

Lemme 2.13

d_n^f est une distance sur X induisant la même topologie que d . De plus,

$$d_{n+m}^f(x, y) = \max\{d_n^f(x, y), d_m^f(f^n(x), f^n(y))\}.$$

Preuve du lemme.

La symétrie de d_n^f est immédiate. Comme $d(x, y) \leq d_n^f(x, y)$, on a aussi le caractère défini. Pour l'inégalité triangulaire, on a pour tout $j = 0, \dots, n-1$:

$$d(f^j(x), f^j(y)) \leq d(f^j(x), f^j(z)) + d(f^j(z), f^j(y)) \leq d_n^f(x, z) + d_n^f(z, y)$$

donc

$$d_n^f(x, y) \leq d_n^f(x, z) + d_n^f(z, y).$$

La distance d_n^f induit la même topologie que d , car on a, pour tout $x, y \in X$:

- $d(x, y) \leq d_n^f(x, y)$ par définition
- $d_n^f(x, y) = \max_{j=0, \dots, n-1} d(f^j(x), f^j(y)) \leq \max_{j=0, \dots, n-1} \eta^j \times d(x, y)$ si η est un module de continuité uniforme pour f (qui existe car f continue sur X compact).

donc $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, d_n^f)$ est bi-Lipschitz, donc bicontinue. ■

Par définition d'un compact, l'objet suivant existe nécessairement :

Définition 2.14: Recouvrement ε -fin

Soit $\varepsilon > 0$. Un recouvrement ε -fin de X (pour une distance $\tilde{d}$) est une famille finie $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X telles que $X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ et telles que tout $U \in \mathcal{U}$ a un diamètre inférieur à ε (i.e. $x, y \in U \implies \tilde{d}(x, y) \leq \varepsilon$).

On note $D_d(f, n, \varepsilon)$ le cardinal minimal d'un recouvrement ε -fin de X pour la distance d_n^f . Cette quantité compte les points distinguables à une erreur $\varepsilon > 0$ près au bout de n étapes successives du système. Cette quantité va varier d'une certaine manière en fonction de n . On verra (sous-sous-section 2.4.2) que cette quantité a tendance à croître de manière exponentielle. On va donc vouloir considérer

$$h_d(f, \varepsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln D_d(f, n, \varepsilon)$$

le taux de croissance (logarithmique) de cette quantité avec le temps. Montrons que cette quantité est bien définie.

Lemme 2.15: Lemme de Fekete

Soit $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite sous-additive (i.e. $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pour tous n, m) telle que $\ell := \inf_n \frac{a_n}{n} > -\infty$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

existe et vaut ℓ .

Preuve du lemme.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe m tel que $\frac{a_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$ par définition de la borne inférieure. On va vouloir approcher les $\frac{a_n}{n}$ par une quantité en $\frac{a_m}{m}$. Écrivons la division euclidienne $n = mq + r$, $0 \leq r < m$. Alors

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{mq+r}}{mq+r} \leq \frac{a_{mq}}{mq+r} + \frac{a_r}{mq+r} = \frac{a_{mq}}{mq} \frac{mq}{mq+r} + \frac{a_r}{r} \frac{r}{mq+r}$$

avec

$$\frac{a_{mq}}{mq} \underbrace{\frac{mq}{mq+r}}_{\leq 1} \leq \frac{\overbrace{a_m + \dots + a_m}^{q \text{ fois}}}{mq} = \frac{a_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$$

et

$$\frac{a_r}{r} \frac{r}{mq+r} = \frac{a_r}{r} \frac{r}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc pour tout n assez grand, $\ell \leq \frac{a_n}{n} \leq \ell + 2\varepsilon$. ■

Proposition 2.16

La quantité

$$h_d(f, \varepsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln D_d(f, n, \varepsilon) \in [0, +\infty[$$

est bien définie.

Preuve de la proposition.

En vertu du lemme 2.15 et propriétés du logarithme, il suffit de montrer que

$$D_d(f, n + m, \varepsilon) \leq D_d(f, n, \varepsilon) D_d(f, m, \varepsilon)$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Il faut pour cela exhiber un recouvrement ε -fin pour d_{n+m}^f avec la bonne cardinalité. La formule du lemme 2.13 indique que si A (resp. B) est de diamètre ε pour d_n^f (resp. d_m^f) alors

$$A \cap f^{-n}(B)$$

est de diamètre ε pour d_{n+m}^f (en effet, si $x, y \in A \cap f^{-n}(B)$ alors $x, y \in A$ donc $d_n^f(x, y) \leq \varepsilon$ et $f^n(x), f^n(y) \in B$ donc $d_m^f(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon$).

Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) un recouvrement ε -fin pour d_n^f (resp. d_m^f). Alors

$$\mathcal{U} := \{A \cap f^{-n}(B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

est un recouvrement de X qui est ε -fin pour d_{n+m}^f . De plus,

$$|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$$

Donc, comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont quelconques,

$$D_d(f, n + m, \varepsilon) \leq D_d(f, n, \varepsilon) D_d(f, m, \varepsilon).$$

La limite est également positive car $D_d(f, n, \varepsilon)$ est nécessairement supérieur ou égal à 1 (une famille vide ne peut pas recouvrir X), et finie car selon le lemme 2.15, $h_d(f, \varepsilon) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \ln D_d(f, n, \varepsilon)$. ■

La quantité $h_d(f, \varepsilon)$ est par définition (et monotonie de la limite) une fonction décroissante de ε . L'entropie topologique de f est alors la limite (monotone)

$$h_d(f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_d(f, \varepsilon) \in [0, +\infty],$$

qui encapsule la quantité $h_d(f, \varepsilon)$ en épousant tous les détails de l'espace X .

L'adjectif *topologique* est justifié par le fait suivant :

Proposition 2.17

Soit $\tilde{d}$ distance sur X induisant la même topologie que d . Alors

$$h_{\tilde{d}}(f) = h_d(f).$$

Preuve de la proposition.

L'application $\text{id} : (X, \tilde{d}) \rightarrow (X, d)$ est un homéomorphisme, avec X compact, donc elle est notamment uniformément continue. Ainsi, si $\varepsilon > 0$, alors il existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tel que

$$\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{\varepsilon} \implies d(x, y) \leq \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\mathcal{U}$ recouvrement $\tilde{\varepsilon}$ -fin de X (pour $\tilde{d}_n^f$), $\mathcal{U}$ est un recouvrement ε -fin de X pour d_n^f . Donc

$$D_d(f, n, \varepsilon) \leq |\mathcal{U}|$$

et comme $\mathcal{U}$ est quelconque

$$D_d(f, n, \varepsilon) \leq D_{\tilde{d}}(f, n, \varepsilon).$$

Cela implique donc

$$h_d(f) \leq h_{\tilde{d}}(f).$$

et par symétrie, on a aussi l'inégalité inverse. ■

Remarque

La définition donnée ici (issue de [Wea16]) est une des nombreuses formulations équivalentes que l'on peut retrouver dans [HK03].

2.4.2 Calculs d'entropie

Le calcul d'une entropie topologique témoigne de la capacité de f à éloigner les points proches. Si f a tendance à séparer les points, alors les distances d_n^f sont de plus en plus fines en fonction de n , donc un recouvrement de X relatif à d_n^f nécessite proportionnellement plus de parties. L'entropie topologique correspondra au logarithme du facteur majoritaire selon lequel les points sont séparés.

L'entropie est souvent considérée comme une mesure quantitative du chaos d'un système : un système chaotique correspondrait à une entropie topologique strictement positive. Pour la définition de chaos que nous avons donnée (définition 2.8), les exemples que nous traitons ici confirment cette idée (comparer avec la proposition 2.9).

Proposition 2.18

Soit la rotation du cercle $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$. On a

$$h_{\text{top}}(R_\alpha) = 0.$$

Preuve de la proposition.

Le résultat est prévisible car R_α est une isométrie (proposition 1.8). On vérifie en fait que selon ce qui précède, $d_n = d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $D_d(R_\alpha, n, \varepsilon)$ est constant en n . Alors $h_d(R_\alpha, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln D_d(R_\alpha, n, \varepsilon) = 0$, donc $h_{\text{top}}(R_\alpha) = 0$. ■

Notre premier exemple de calcul pour un système chaotique est la doubling map $(\mathbb{T}^1, E_2)$ (définition 1.18). Les points de $\mathbb{T}^1$ proches doublent leur distance après application de E_2 . On peut donc s'attendre à une entropie de $\ln 2$.

Proposition 2.19

Soit la doubling map $(\mathbb{T}^1, E_2)$. On a

$$h_{\text{top}}(E_2) = \ln 2 > 0.$$

Preuve de la proposition.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les points $[x], [y] \in \mathbb{T}^1$ à distance $1/2^n$ vérifient (on suppose directement $|x - y| \leq 1/2^n$)

$$\forall j = 0, \dots, n-1, \quad d(E_2^j([x]), E_2^j([y])) = |2^j x - 2^j y| = 2^j |x - y| = 2^j d([x], [y])$$

car $|2^j x - 2^j y| \leq 1/2$ si $0 \leq j \leq n-1$, donc on a

$$d_n([x], [y]) = 2^{n-1} d([x], [y]).$$

Ainsi, si $A \subset \mathbb{T}^1$ a un diamètre ε pour d_n , cela signifie que A a un diamètre $\varepsilon 2^{n-1}$ pour d .

Il s'agit maintenant d'encadrer $D_d(E_2, n, \varepsilon)$ par des quantités équivalentes à 2^n pour n grand, pour montrer par double inégalité que $h_d(E_2) = \ln 2$.

- On considère le recouvrement $\mathcal{U}$ (dans $\mathbb{R}$) de $[0, 1[$ obtenu en plaçant des intervalles de diamètre (pour $|\cdot|$) $\varepsilon/2^n$ les uns à côté des autres. Ce recouvrement a $\lfloor 2^n \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$ éléments, et $\pi(\mathcal{U})$ est un recouvrement ε -fin de $\mathbb{T}^1$ pour d_n selon ce qui précède. On a donc

$$D_d(E_2, n, \varepsilon) \leq |\pi(\mathcal{U})| \leq |\mathcal{U}| = \lfloor 2^n \varepsilon^{-1} \rfloor + 1 \leq 2^n \varepsilon^{-1} + 1.$$

— Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement quelconque, ε -fin pour d_n , de $\mathbb{T}^1$. Chaque $U \in \mathcal{U}$ est inclus dans la projection d'un intervalle de diamètre $\varepsilon/2^{n-1}$. On a :

$$1 = \text{long}(\mathbb{T}^1) \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \text{long}(U) \leq |\mathcal{U}| \times \varepsilon/2^n$$

donc

$$|\mathcal{U}| \geq 2^n \varepsilon^{-1}.$$

Comme $\mathcal{U}$ est quelconque,

$$D_d(E_2, n, \varepsilon) \geq 2^n \varepsilon^{-1}.$$

Au final,

$$2^n \varepsilon^{-1} \leq D_d(E_2, n, \varepsilon) \leq 2^n \varepsilon^{-1} + 1$$

donc

$$h_d(E_2, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln D_d(E_2, n, \varepsilon) = \ln 2$$

d'où

$$h_{\text{top}}(E_2) = h_d(E_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_d(E_2, \varepsilon) = \ln 2.$$

On s'intéresse à la shift-map. Pour les suites $x, y \in \Sigma_2$ qui se distinguent uniquement aux indices positifs, on peut vérifier que $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2d(x, y)$. Si elles se distinguent aux indices négatifs, $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2^{-1}d(x, y)$. Heuristiquement, c'est le premier comportement, qui sépare les points avec un taux exponentiel $\ln 2$, qui prévaut. Ceci se vérifie bien :

Proposition 2.20

Soit la shift-map (Σ_2, σ) . On a

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \ln 2 > 0.$$

Preuve de la proposition.

Soient $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k := 2^{-(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pour $x, y \in \Sigma_2$, on a :

$$\begin{aligned} d_n(x, y) &\leq \varepsilon_k \\ \iff \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad d(\sigma^j(x), \sigma^j(y)) &\leq \varepsilon_k \\ \stackrel{(\text{prop. 1.14})}{\iff} \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \forall i \in \{-k, -k+1, \dots, k\}, \quad (\sigma^j(y))_i &= (\sigma^j(x))_i \\ \iff \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \forall i \in \{-k-j, -k-j+1, \dots, k-j\}, \quad y_i &= x_i \\ \iff \forall i \in \{-k-n+1, -k-n+2, \dots, k\}, \quad y_i &= x_i \\ \iff y \in U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}$ est la boule fermée centrée en x de rayon ε_k pour la distance d_n^f .

— La famille $\mathcal{U}$ des parties de la forme $U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}$ est un recouvrement de Σ_2^+ , ε_k -fin pour d_n , et il contient 2^{2k+n-2} éléments. Ainsi

$$D_d(\sigma, n, \varepsilon_k) \leq |\mathcal{U}| = 2^{2k+n-2}.$$

— Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement quelconque ε_k -fin de Σ_2^+ pour d_n . Chaque $U \in \mathcal{U}$ est inclus dans un $U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}$. Donc on dispose d'une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \{0,1\}^{2k+n-2} \\ U & \longmapsto & (x_{-k-n+1}, \dots, x_k) \end{array} ,$$

qui est clairement surjective car $\mathcal{U}$ est un recouvrement. Ceci établit $|\mathcal{U}| \geq 2^{2k+n-2}$. Comme $\mathcal{U}$ est quelconque, on a donc

$$D_d(\sigma, n, \varepsilon_k) \geq 2^{2k+n-2}.$$

On a établi

$$D_d(\sigma, n, \varepsilon_k) = 2^{2k+n-2},$$

d'où on déduit automatiquement

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \ln 2.$$

Remarque

On rappelle (sous-sous-section 1.3.2) que l'on avait encodé la doubling map $(\mathbb{T}^1, E_2)$ par la shift-map (Σ_2^+, σ) à travers une application $\varphi : \Sigma_2^+ \rightarrow \mathbb{T}^1$, telle que

$$\forall x, y \in \Sigma_2^+, \quad d_{\mathbb{T}^1}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq 2d_{\Sigma_2}(x, y).$$

Avec cet encodage, les entropies topologiques sont alors reliées. En effet, fixons $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Un recouvrement $\mathcal{U}$ de Σ_2^+ , ε -fin pour d_n^σ , définit un recouvrement $\varphi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{T}^1$, 2ε -fin pour $d_n^{E_2}$. Par conséquent,

$$D_d(E_2, n, 2\varepsilon) \leq D_d(\sigma, n, \varepsilon)$$

et donc, en prenant les limites en n puis en ε :

$$h_{\text{top}}(E_2) \leq h_{\text{top}}(\sigma).$$

Cette trame de preuve fonctionne aussi pour les chaînes de Markov topologiques. On admet d'abord le résultat classique suivant.

Lemme 2.21

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note $\rho(M) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valeur propre de } M\}$ son rayon spectral. Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M).$$

Proposition 2.22

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \subset \{0,1\}^{N \times N}$ non nulle. On note $\rho(M)$ son rayon spectral. On considère la chaîne de Markov topologique (Σ_M, σ_M) . Alors

$$h_{\text{top}}(\sigma_M) = \ln \rho(M).$$

Preuve de la proposition.

Comme dans la preuve précédente pour la shift-map, $U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}$ est la boule fermée centrée en x de rayon $\varepsilon_k = 2^{-(k+1)}$ pour la distance d_n^f .

- La famille $\mathcal{U}$ des parties de la forme $U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}$, où $x_{-k-n+1}, \dots, x_k$ est valable par rapport à la matrice M , est un recouvrement ε_k -fin pour d_n de Σ_M . Il y a (en utilisant la proposition 1.16)

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [M^{2k+n-2}]_{i,j}$$

éléments dans $\mathcal{U}$. Donc $D_d(\sigma_M, n, \varepsilon_k) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [M^{2k+n-2}]_{i,j}$.

- Pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ ε_k -fin de Σ_M pour d_n , les $U \in \mathcal{U}$ sont inclus dans un $U_{x_{-k-n+1}, \dots, x_k}$, où $x_{-k-n+1}, \dots, x_k$ est valable par rapport à la matrice M , on a en fait

$$D_d(\sigma_M, n, \varepsilon_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [M^{2k+n-2}]_{i,j}.$$

Par équivalence des normes en dimension finie, si $\|\cdot\|$ est une norme subordonnée, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha \|M^{2k+n-2}\| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [M^{2k+n-2}]_{i,j} \leq \beta \|M^{2k+n-2}\|$$

(car les coefficients des puissances de M sont positifs, donc la quantité encadrée est la norme uniforme de M^{2k+n-2}) avec par continuité de $\ln$ et selon le lemme 2.21

$$\frac{1}{n} \ln \|M^n\| = \ln \|M^n\|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \rho(M).$$

On a bien

$$h_{\text{top}}(\sigma_M) = \ln \rho(M).$$

On finit par le calcul de l'entropie topologique de la cat-map. Ce système est à deux dimensions, mais on rappelle que A possède deux valeurs propres $0 < \lambda^{-1} < 1 < \lambda$, de sorte que tout $v \in \mathbb{R}^2$ tend vers E_λ par applications répétées de A . Pour $x \in E_\lambda$, on a $Ax = \lambda x$, on s'attendrait à une séparation des points induisant une entropie topologique $\ln \lambda$. Montrons que c'est bien le cas.

Proposition 2.23

Soit $(\mathbb{T}^2, A)$ la cat-map. On a

$$h_{\text{top}}(A) = \ln \lambda > 0.$$

Preuve de la proposition.

On note p_λ et $p_{\lambda^{-1}}$ les applications coordonnées suivant v_λ et $v_{\lambda^{-1}}$ respectivement. Rappelons que v_λ et $v_{\lambda^{-1}}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| = \sqrt{(p_\lambda(x) - p_\lambda(y))^2 + (p_{\lambda^{-1}}(x) - p_{\lambda^{-1}}(y))^2}.$$

Soit $0 < \varepsilon < 1/2$. On se donne $U \subset \mathbb{T}^2$ de d_n -diamètre ε , alors

$$\forall x, y \in U, \quad \max\{d(A^j(x), A^j(y)) : j = 0, \dots, n-1\} \leq \varepsilon$$

i.e., en faisant ici l'identification entre $\mathbb{T}^2$ et $[0,1]^2$ (on peut le faire pour exprimer les distances car U a un diamètre inférieur à $1/2$)

$$\forall x, y \in U, \quad \max\left\{\sqrt{\lambda^{2j}(p_\lambda(x) - p_\lambda(y))^2 + \lambda^{-2j}(p_{\lambda^{-1}}(x) - p_{\lambda^{-1}}(y))^2} : j = 0, \dots, n-1\right\} \leq \varepsilon$$

d'où

$$|p_\lambda(x) - p_\lambda(y)| \leq \varepsilon / \lambda^{n-1}, \quad |p_{\lambda^{-1}}(x) - p_{\lambda^{-1}}(y)| \leq \varepsilon.$$

Donc il existe $v_0 \in \mathbb{T}^2$ tel que

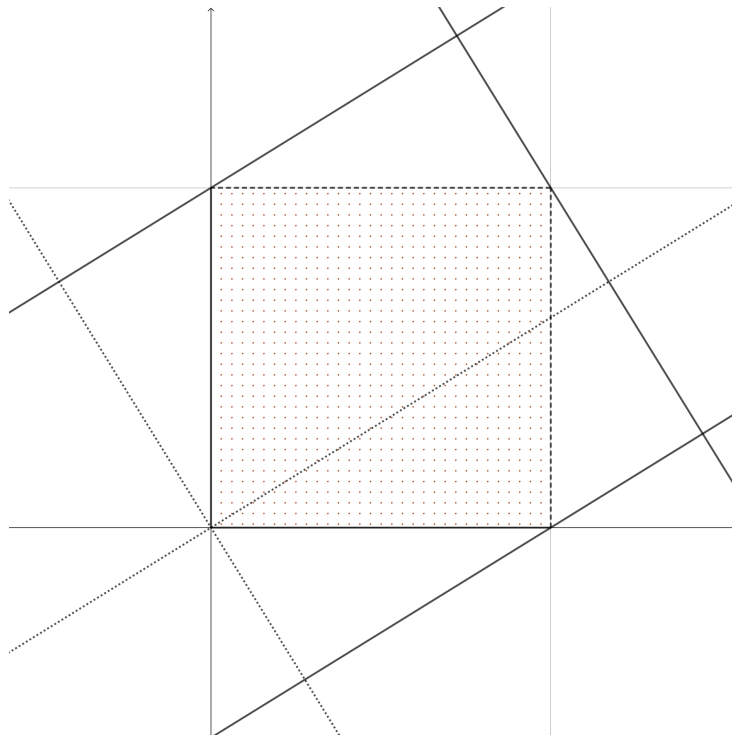
$$U \subset \{v_0 + s v_\lambda + t v_{\lambda^{-1}} : (s, t) \in [0, \lambda^{-(n-1)}\varepsilon] \times [0, \varepsilon]\} =: R(v_0, \lambda^{-(n-1)}\varepsilon, \varepsilon).$$

Réciproquement, le d_n -diamètre de $R = R(v_0, \lambda^{-(n-1)}\varepsilon, \varepsilon)$ est

$$\begin{aligned} \max\{d_n(x, y) : x, y \in R\} &= \max_{j=0, \dots, n-1} \max_{s, s' \in [0, \lambda^{-(n-1)}\varepsilon], t, t' \in [0, \varepsilon]} \sqrt{\lambda^{2j}(s - s')^2 + \lambda^{-2j}(t - t')^2} \\ &= \max_{j=0, \dots, n-1} \sqrt{\lambda^{2j}(\lambda^{-(n-1)}\varepsilon)^2 + \lambda^{-2j}\varepsilon^2} \leq \sqrt{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

— Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement quelconque de $\mathbb{T}^2$, ε -fin pour d_n . Pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $v_0 \in \mathbb{T}^2$ tel que $U \subset R(v_0, \lambda^{-(n-1)}\varepsilon, \varepsilon)$, de mesure de Lebesgue $\lambda^{-(n-1)}\varepsilon^2$. Donc

$$1 = \text{aire}(\mathbb{T}^2) \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \text{aire}(U) \leq |\mathcal{U}| \times \lambda^{-(n-1)}\varepsilon^2,$$

Figure 10 – Inscrption de $[0,1]^2$ dans un rectangle porté par E_λ et $E_{\lambda^{-1}}$

et alors

$$|\mathcal{U}| \geq \lambda^{n-1} \varepsilon^{-2}.$$

Comme $\mathcal{U}$ est quelconque :

$$D_d(A, n, \varepsilon) \geq \lambda^{n-1} \varepsilon^{-2}.$$

- Recouvrons $\mathbb{T}^2$ d'une manière adaptée. On va inscrire le carré $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ dans un rectangle dirigé par les droites E_λ et $E_{\lambda^{-1}}$ (figure 10). Si les dimensions du rectangle sont $\ell \times L$, alors il peut être recouvert par

$$\left(\left\lfloor \frac{\ell}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{L}{\lambda^{-(n-1)} \varepsilon} \right\rfloor + 1 \right)$$

rectangles de la forme $R(v_0, \lambda^{-(n-1)} \varepsilon, \varepsilon)$. Ce recouvrement passe à la projection dans $\mathbb{T}^2$, et il est alors $\sqrt{2}\varepsilon$ -fin pour d_n . Ceci montre que

$$D_d(A, n, \varepsilon) \leq \left(\left\lfloor \frac{\ell}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{L}{\lambda^{-(n-1)} \varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \leq \lambda^n \left(\frac{\ell}{\varepsilon \lambda^n} + \lambda^{-n} \right) \left(\lambda \frac{L}{\varepsilon} + \lambda^{-n} \right)$$

donc

$$D_d(A, n, \sqrt{2}\varepsilon) \leq \lambda^n \left(\frac{\ell}{\varepsilon} + 1 \right) \left(\frac{L}{\varepsilon} + 1 \right).$$

Au final,

$$\lambda^{n-1} \varepsilon^{-2} \leq D_d(A, n, \varepsilon) \leq \lambda^n \left(\frac{\ell}{\varepsilon/\sqrt{2}} + 1 \right) \left(\frac{L}{\varepsilon/\sqrt{2}} + 1 \right).$$

On trouve bien

$$h_{\text{top}}(A) = \ln \lambda.$$

Remarque

Cette entropie peut aussi être calculée en considérant un encodage de $(\mathbb{T}^2, A)$ par la chaîne de Markov topologique issue de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(voir [HK03]).

3 Croissance des orbites et entropie topologique

Cette section concerne le problème du dénombrement du nombre d'orbites périodiques d'un système, et du lien entre cette quantité et l'entropie topologique d'un système.

Ce lien, qui est, dans les exemples que nous verrons, toujours de la même nature (l'entropie topologique et la croissance logarithmique du nombre d'orbites selon leur période coïncident), est observable dans de nombreuses situations. Un théorème général de Grigory Margulis² qui concerne les *flots hyperboliques topologiquement mélangeants* ([Wea16]) clarifie cette observation : si $P_t^\mathcal{O}$ est le nombre d'orbites de période inférieure à t , on a la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{\text{top}} \frac{t P_t^\mathcal{O}}{e^{t h_{\text{top}}}} = 1,$$

i.e. l'équivalent $P_t^\mathcal{O} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{h_{\text{top}}} \frac{e^{t h_{\text{top}}}}{t}$ qui exprime notamment $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P_t^\mathcal{O} = h_{\text{top}}$.

3.1 Cas des systèmes de Markov

Théorème 3.1: Dénombrement des orbites de la shift-map

Soit la shift-map (Σ_2^+, σ) . On note $h_{\text{top}} = \ln 2$ son entropie topologique et

- P_n le nombre de points $x \in \Sigma_2$ tels que $\sigma^n(x) = x$;
- $P_n^\mathcal{O}$ le nombre d'orbites de période inférieure à n .

Alors

$$P_n = 2^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-h_{\text{top}}}) \frac{n P_n^\mathcal{O}}{e^{n h_{\text{top}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n P_n^\mathcal{O}}{2^n} = 1.$$

Notamment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n^\mathcal{O} = h_{\text{top}}.$$

Preuve. Un $x \in \Sigma_2^+$ vérifie $\sigma^n(x) = x$ si et seulement si

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x_{i+n} = x_i,$$

donc x est entièrement déterminé par $x_0, \dots, x_{n-1}$. Chaque élément de Σ_2^+ est une suite à valeurs dans $\{0,1\}$, on a donc

$$P_n = 2^n.$$

La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n^\mathcal{O} = h_{\text{top}}$ est obtenue avec le même argument que celui explicité plus bas (proposition 3.4) en remplaçant λ par 2. □

2. Grigory Margulis (1946–), mathématicien russo-américain (https://en.wikipedia.org/wiki/Grigory_Margulis)

Remarque

Ce résultat se traduit aussi au système $(\mathbb{T}^1, E_2)$, à travers l'application d'encodage $\varphi : \Sigma_2^+ \rightarrow \mathbb{T}^1$: une suite $x \in \Sigma_2^+$, non stationnaire sur 1, telle que $\sigma^n(x) = x$, correspond à un unique $y = \varphi(x) \in \mathbb{T}^1$ tel que $E_2^n(y) = y$. Parmi les suites stationnaires sur 1, seule la suite $(1, \dots, 1, \dots)$ est de période n . Donc si P_n est le nombre de $y \in \mathbb{T}^1$ tels que $E_2^n(y) = y$, alors

$$P_n = 2^n - 1.$$

On pouvait retrouver ce résultat directement en remarquant que

$$E_2^n([x]) = [x] \iff [2^n x] = [x] \iff 2^n x - x \in \mathbb{Z} \iff x \in \frac{1}{2^n - 1} \mathbb{Z}.$$

Théorème 3.2: Dénombrement des orbites d'une chaîne de Markov topologique

Soit une chaîne de Markov topologique (Σ_M, σ_M) , avec $M \in \{0,1\}^{N \times N}$. On note $h_{\text{top}} = \ln \rho(M)$ son entropie topologique et P_n le nombre de points $x \in \Sigma_M$ tels que $\sigma_M^n(x) = x$. Alors $P_n = \text{tr}(M^n)$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n = h_{\text{top}}.$$

Preuve. On sait déjà que $P_n = \text{tr}(M^n)$ grâce au corollaire 1.17.

D'une part, la trace est la somme des valeurs propres (complexes) :

$$|\text{tr}(M^n)| \leq N \rho(M)^n$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n \leq \ln \rho(M).$$

Pour l'autre sens, soient $\lambda_j = r e^{2i\pi\varphi_j}$, $1 \leq j \leq k$, les valeurs propres de M de module maximal ($r = \rho(M)$). Par périodicité (si φ_j est rationnel) ou densité (si φ_j est irrationnel) des orbites de $(\mathbb{T}^1, R_{\varphi_j})$, il existe une suite d'entiers $(m_n)_n$ strictement croissante telle que

$$\forall 1 \leq j \leq k, \quad [m_n \varphi_j] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [0]$$

donc

$$\frac{\sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j^{m_n}}{k r^{m_n}} = \frac{\sum_{1 \leq j \leq k} r^{m_n} e^{2i\pi m_n \varphi_j}}{k r^{m_n}} = \frac{1}{k} \sum_{1 \leq j \leq k} e^{2i\pi m_n \varphi_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Comme les coefficients de M^{m_n} sont positifs,

$$P_{m_n} = \text{tr}(M^{m_n}) \geq \sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j^{m_n}$$

donc on a

$$\frac{1}{m_n} \ln P_{m_n} \geq \frac{1}{m_n} \ln \left(\sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j^{m_n} \right) = \frac{1}{m_n} \ln (k r^{m_n} (1 + o(1))) = \frac{\ln(k r^{m_n}) + \ln(1 + o(1))}{m_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln r$$

et alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n \geq \ln r = \ln \rho(M).$$

□

3.2 Cas de la cat-map

Théorème 3.3: Dénombrement des orbites de la cat-map

Soit la cat-map $(\mathbb{T}^2, A)$. On note $h_{\text{top}} = \ln \lambda$ son entropie topologique et

- P_n le nombre de points $x \in \mathbb{T}^2$ tels que $A^n(x) = x$;
- $P_n^{\mathcal{O}}$ le nombre d'orbites de période inférieure à n .

Alors on a les limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{\lambda^n} = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-h_{\text{top}}}) \frac{n P_n^{\mathcal{O}}}{e^{n h_{\text{top}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{n P_n^{\mathcal{O}}}{\lambda^n} = 1 \quad (2)$$

Notamment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n^{\mathcal{O}} = h_{\text{top}}.$$

L'égalité 2 se déduit de l'égalité 1 par une application du théorème de convergence dominée :

Proposition 3.4

Dans le théorème 3.3, l'égalité 1 implique l'égalité 2.

Preuve de la proposition.

Une orbite de taille j correspond à j points de plus petite période j , on a donc

$$P_n^{\mathcal{O}} = \sum_{j=1}^n \frac{P_j^*}{j}$$

en notant P_j^* le nombre de points de plus petite période j .

Montrons que, comme pour P_j , on a $P_j^* \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^j$. La quantité P_j^* est le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{T}^2 : A^j x = x\} \setminus \bigcup_{k|j} \{x \in \mathbb{T}^2 : A^k x = x\}$$

d'où l'encadrement suivant :

$$P_j - \sum_{k=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} P_k \leq P_j - \sum_{k|j} P_k \leq P_j^* \leq P_j.$$

Il existe selon l'égalité 1, $k_0 \geq 0$ tel que $k \geq k_0 \implies P_k \leq 2\lambda^k$. Aussi, $|P_j - \lambda^j| = o(\lambda^j)$. Par conséquent, si $j \geq k_0$, on a bien

$$\begin{aligned} |P_j^* - \lambda^j| &\leq |P_j - \lambda^j| + \sum_{k=1}^{k_0-1} |P_j - \lambda^j| + \sum_{k=k_0}^{\lfloor j/2 \rfloor} 2\lambda^k + \sum_{k=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} \lambda^k \\ &\leq |P_j - \lambda^j| + \sum_{k=1}^{k_0-1} |P_k - \lambda^k| + 3 \frac{1 - \lambda^{\lfloor j/2 \rfloor}}{1 - \lambda} = o(\lambda^j). \end{aligned}$$

On a donc que $\frac{P_j^*}{j} \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\lambda^j}{j}$, avec $\sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j} = +\infty$. Par un résultat de sommation d'équivalents :

$$P_n^{\mathcal{O}} = \sum_{j=1}^n \frac{P_j^*}{j} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^j}{j}.$$

Enfin :

$$\frac{n}{\lambda^n} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^j}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{n\lambda^{j-n}}{j} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n\lambda^{-j}}{n-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n\lambda^{-j}}{n-j} \mathbf{1}_{j < n}$$

avec

$$\frac{n\lambda^{-j}}{n-j} \mathbf{1}_{j < n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^{-j}, \quad \frac{n\lambda^{-j}}{n-j} \mathbf{1}_{j < n} \leq (j+1)\lambda^{-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\lambda^{-j} < +\infty,$$

donc par théorème de convergence dominée

$$\frac{n}{\lambda^n} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^j}{j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

On a bien l'égalité 2 du théorème 3.3 :

$$\frac{n}{\lambda^n} P_n^{\mathcal{O}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Nous proposons deux preuves du théorème 3.3 (on démontrera donc seulement l'égalité 1), une repose sur des propriétés algébriques *ad-hoc* de A , l'autre reflète des procédés de preuves généralisables à une plus vaste famille de systèmes (c'est une idée directrice proche du théorème général). On voit notamment que le caractère mélangeant d'un système est un mécanisme essentiel dans la mise en place du résultat. Dans les deux preuves un principe général se dégage : relier un problème de dénombrement à un problème de mesure.

3.2.1 Une preuve algébrique

Cette preuve repose sur l'observation suivante :

$$[x] \in \mathbb{T}^2 \text{ est de période } n \iff (A^n - I_2)x \in \mathbb{Z}^2.$$

Comme $A^n - I_2$ est inversible, on a donc

$$P_n = |(A^n - I_2)([0,1]^2) \cap \mathbb{Z}^2|$$

(voir figure 11).

La quantité P_n est donc une quantité reliée au nombre de points entiers appartenant à l'intérieur et à la frontière du polygone à sommets entiers $(A^n - I_2)([0,1]^2)$.

La correspondance « dénombrement – mesure » se fait à travers le résultat suivant :

Proposition 3.5: Lemme de Pick

Soit C un polygone du plan, à sommets entiers. On note i_C (resp. b_C) le nombre de points entiers à l'intérieur de C (resp. sur la frontière de C). Alors

$$\text{aire}(C) = i_C + b_C/2 - 1.$$

Preuve de la proposition.

Supposons que C soit la réunion de deux polygones entiers C_1 et C_2 partageant un unique côté.

Si la formule est vraie pour C_1 et pour C_2 , et si δ est le nombre de points entiers sur le côté commun à C_1 et C_2 ,

$$i_C = i_{C_1} + i_{C_2} + \delta, \quad b_C = b_{C_1} + b_{C_2} - 2\delta + 2$$

donc

$$\begin{aligned} i_C + b_C/2 - 1 &= i_{C_1} + i_{C_2} + \delta + \frac{b_{C_1} + b_{C_2} - 2\delta + 2}{2} - 1 \\ &= (i_{C_1} + b_{C_1}/2 - 1) + (i_{C_2} + b_{C_2}/2 - 1) \\ &= \text{aire}(C_1) + \text{aire}(C_2) = \text{aire}(C). \end{aligned}$$

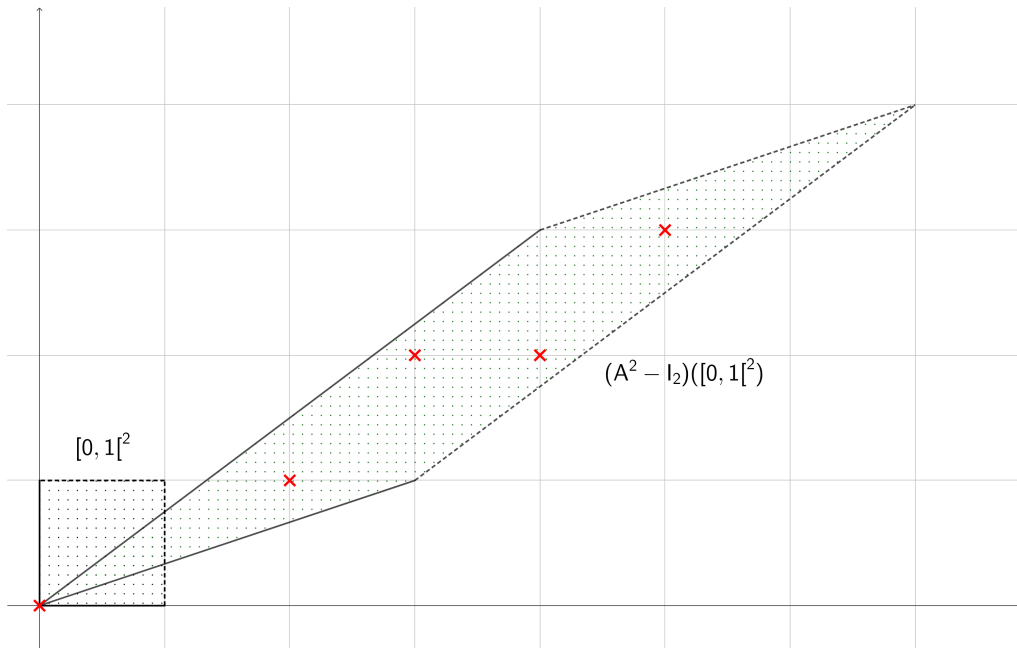


Figure 11 – Il y a cinq points de période 2, correspondant aux cinq points entiers de $(A^2 - I_2)([0, 1]^2)$.

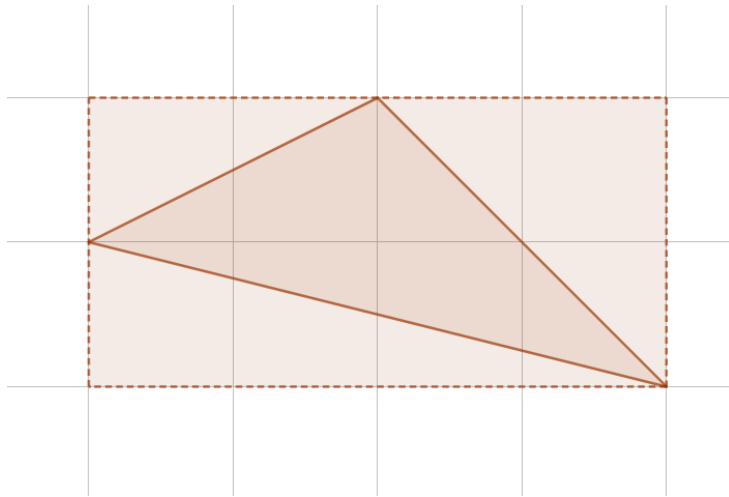


Figure 12 – Inscription d'un triangle entier quelconque dans un rectangle entier.

Si la formule est vraie pour C et C_2 , alors on peut aussi exprimer

$$\begin{aligned} i_{C_1} + b_{C_1}/2 - 1 &= (i_C - i_{C_2} - \delta) + \frac{b_C - b_{C_2} + 2\delta - 2}{2} - 1 \\ &= (i_C + b_C/2 - 1) - (i_{C_2} - b_{C_2}/2 - 1) \\ &= \text{aire}(C) - \text{aire}(C_2) = \text{aire}(C_1). \end{aligned}$$

La formule se démontre alors en général par récurrence sur le nombre de sommets de C . L'initialisation est le cas où C est un triangle, auquel cas on peut vérifier la formule en la vérifiant d'abord sur les rectangles et triangles rectangles, puis en inscrivant C dans un rectangle aligné sur $\mathbb{Z}^2$ (voir figure 12).

La proposition 3.5 permet de calculer exactement la quantité P_n . On peut en effet écrire

$$\begin{aligned} |(A^n - I_2)([0, 1]^2) \cap \mathbb{Z}^2| &= |(A^n - I_2)([0, 1]^2) \cap \mathbb{Z}^2| \\ &\quad + |(A^n - I_2)(\{0\} \times [0, 1]) \cap \mathbb{Z}^2| \\ &\quad + |(A^n - I_2)([0, 1] \times \{0\}) \cap \mathbb{Z}^2| - 1 \end{aligned}$$

Soit $C := (A^n - I_2)([0, 1]^2)$.

— On a

$$|(A^n - I_2)(]0,1[^2) \cap \mathbb{Z}^2| = i_C.$$

— Également

$$|(A^n - I_2)(\{0\} \times [0,1[\cap \mathbb{Z}^2| + |(A^n - I_2)([0,1[\times \{0\}) \cap \mathbb{Z}^2| = b_C/2$$

puisque

$$\begin{aligned} |(A^n - I_2)(\{0\} \times [0,1[\cap \mathbb{Z}^2| &= |(A^n - I_2)(\{1\} \times [0,1[\cap \mathbb{Z}^2|, \\ |(A^n - I_2)([0,1[\times \{0\}) \cap \mathbb{Z}^2| &= |(A^n - I_2)([0,1[\times \{1\}) \cap \mathbb{Z}^2| \end{aligned}$$

car, par exemple,

$$(A^n - I_2)(0, t) \in \mathbb{Z}^2 \iff (A^n - I_2)(1, t) = (A^n - I_2)(0, t) + (A^n - I_2)(1, 0) \in \mathbb{Z}^2.$$

Finalement, en appliquant la proposition 3.5 :

$$\begin{aligned} P_n &= |(A^n - I_2)([0,1[^2) \cap \mathbb{Z}^2| = i_C + b_C/2 - 1 \\ &= \text{aire}(C) = |\det(A^n - I_2)| \text{aire}([0,1]^2) \\ &= |(\lambda^n - 1)(\lambda^{-n} - 1)| = \lambda^n + \lambda^{-n} - 2 \end{aligned}$$

et on a bien l'égalité 1 du théorème 3.3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{\lambda^n} = 1.$$

3.2.2 Une preuve « à la Margulis »

La preuve fait intervenir deux résultats clé :

« **dénombrément** » Il existe une correspondance entre les points de période n appartenant à une partie R de $\mathbb{T}^1$ d'une certaine forme (les *rectangles propres*) et une certaine quantité combinatoire C_{pleine} portant sur les composantes connexes de $R \cap A^n(R)$ (proposition 3.10, corollaire 3.11).

« **mesure** » Le système $(\mathbb{T}^2, A)$ est mélangeant selon l'aire (théorème 3.12). On peut alors avoir une estimation asymptotique exacte de C_{pleine} en fonction de l'aire de R (corollaire 3.15).

Ces deux points permettent d'établir que le nombre $P_{n,R}$ de points de période n appartenant à un rectangle propre R vérifie (proposition 3.16) :

$$P_{n,R} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^n \text{aire}(R).$$

En recouvrant $\mathbb{T}^2$ convenablement par des parties de la forme R (lemme 3.17), on obtient finalement

$$P_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^n,$$

c'est-à-dire l'égalité 1 du théorème 3.3.

Le déroulé de cette preuve permet de plus d'obtenir le corollaire suivant, reflétant une certaine équidistribution des points de grande période :

Proposition 3.6

On a la limite suivante, pour tout rectangle propre R :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n,R}}{P_n} = \text{aire}(R).$$

Rectangles propres Un *rectangle propre* est un rectangle porté par la base propre (orthonormée) de A , qui se plonge dans le tore $\mathbb{T}^2$.

Définition 3.7: Rectangle propre

Pour $\varepsilon_w, \varepsilon_h > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h) := \{x + s v_\lambda + t v_{\lambda-1} : (s, t) \in [0, \varepsilon_w] \times [0, \varepsilon_h]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Si la restriction $\pi|_{R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h)} : R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h) \rightarrow \mathbb{T}^2$ est injective, alors

$$R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h) := \pi(R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h)) \subset \mathbb{T}^2$$

est appelé *rectangle propre*, de largeur ε_w et de hauteur ε_h .

Si R est un rectangle propre, alors $A(R)$ est encore un rectangle propre, car par construction et bijectivité de $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$,

$$\pi|_{A(R)} = (\pi \circ A)|_R = (A \circ \pi)|_R = A \circ (\pi|_R)$$

est injective.

Remarque

La condition d'injectivité de $\pi|_R$ s'exprime géométriquement ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^2, \quad R \cap (R + k) = \emptyset.$$

Une intersection de deux rectangles propres $R_1 = R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h)$ et $R_2 = R([y], \tilde{\varepsilon}_w, \tilde{\varepsilon}_h)$ est une réunion de rectangles propres qui en sont les composantes connexes : en effet,

$$R_1 \cap R_2 = \pi(R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h)) \cap \pi(R(y, \tilde{\varepsilon}_w, \tilde{\varepsilon}_h)) = \pi(R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h) \cap \pi^{-1}(R_2)).$$

(voir figure 13).

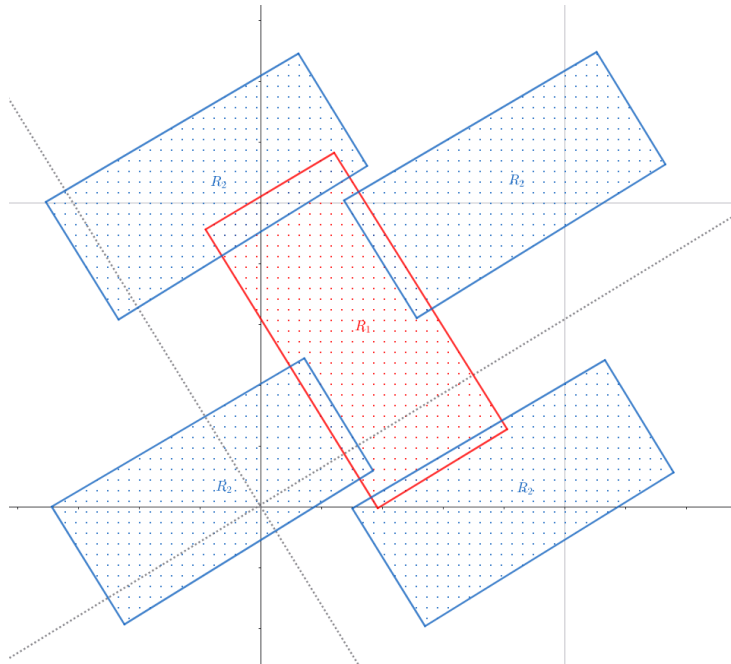


Figure 13 – Pré-image de $R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h) \cap \pi^{-1}(R_2)$ par π

Chacune de ces composantes connexes est un rectangle de largeur (resp. hauteur) inférieure à $\min(\varepsilon_w, \tilde{\varepsilon}_w)$ (resp. $\min(\varepsilon_h, \tilde{\varepsilon}_h)$). On appelle *composante pleine* une composante connexe de largeur $\min(\varepsilon_w, \tilde{\varepsilon}_w)$ et de hauteur $\min(\varepsilon_h, \tilde{\varepsilon}_h)$.

Proposition 3.8: Composantes connexes d'une intersection de rectangles propres

Soient R_1 et R_2 des rectangles propres. Alors l'intersection $R_1 \cap R_2$ est composée d'un nombre fini de composantes connexes, dont au plus huit composantes qui ne sont pas pleines.

Preuve de la proposition.

Chaque composante connexe de $R_1 \cap R_2$ est un rectangle dont 0 à 4 sommets sont ceux de R_1 ou R_2 (par sommet de R_1 ou R_2 , on entend le plongement d'un sommet du rectangle du plan sous-jacent, qui est uniquement identifié par définition d'un rectangle propre). Par définition d'une composante connexe, la donnée de ces sommets décrit de manière unique une composante connexe de $R_1 \cap R_2$. Comme il y a un nombre fini de ces telles données (un rectangle a un nombre fini de sommets), il y a donc un nombre fini de composantes connexes possibles.

Les composantes non pleines correspondent aux données décrites par la figure 14, il ne peut donc pas en y avoir plus que huit.

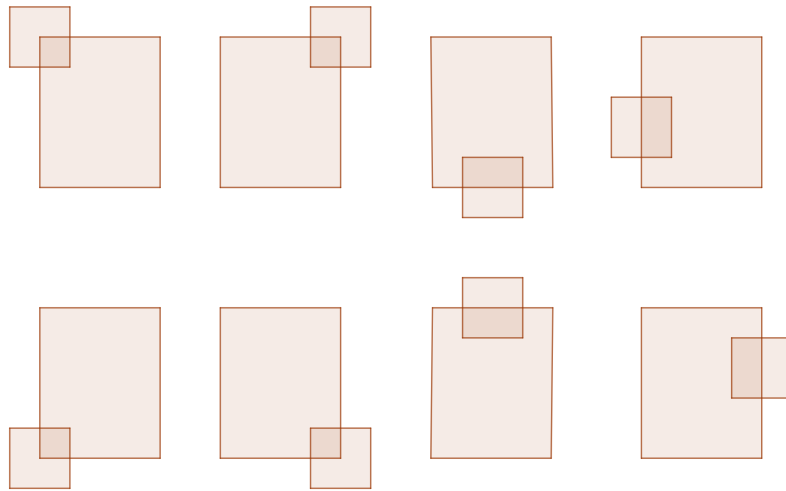


Figure 14 – Les huit possibilités d'intersections non pleines

Remarque

Sous l'action de A , les rectangles propres sont translatés et s'étirent dans la direction de v_λ . En effet, si $R = R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h)$, alors comme A et π commutent,

$$\begin{aligned} A(R) &= A(\pi(R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h))) = \pi(A(R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h))) \\ &= \pi(R(A(x), \lambda \varepsilon_w, \lambda^{-1} \varepsilon_h)) = R(A([x]), \lambda \varepsilon_w, \lambda^{-1} \varepsilon_h). \end{aligned}$$

La proposition 3.10 ci-dessous relie les points de période $n \geq 1$ appartenant à un rectangle propre R aux composantes connexes de $R \cap A^n(R)$. La propriété est naturelle si l'on voit l'appartenance à l'intersection $R \cap A^n(R)$ comme une n -périodicité approximative. Cette approximation suffit à garantir l'existence et l'unicité d'un point de période n sur des parties bien choisies (les composantes connexes pleines), sélectionnées pour leur géométrie. Le lemme 3.9 explicite ces propriétés géométriques vérifiées par les composantes connexes pleines d'une intersection $R \cap A^n(R)$.

Lemme 3.9

Soient $R = R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h)$ un rectangle propre et $n \geq 1$ entier. On suppose que C est une composante connexe *pleine* de $R \cap A^n(R)$. Alors l'intersection $A^n(C) \cap C$ est un rectangle propre qui est aussi son unique composante connexe pleine.

Preuve du lemme.

Le rectangle $A^n(R)$ a pour largeur $\lambda^n \varepsilon_w$ et hauteur $\lambda^{-n} \varepsilon_h$. Le rectangle C est une composante d'intersection pleine, donc sa largeur est ε_w et sa hauteur $\lambda^{-n} \varepsilon_h$. Alors $A^n(C)$ a pour largeur $\lambda^n \varepsilon_w$ et hauteur $\lambda^{-2n} \varepsilon_h$.

Donc $A^n(C)$ a la même largeur que $A^n(R)$ et une hauteur inférieure à celle de $A^n(R)$. Mais comme $C \subset R$, on a $A^n(C) \subset A^n(R)$. Par conséquent, puisque C est inclus dans $A^n(R)$ et a la même hauteur que $A^n(R)$, $A^n(C) \cap C$ est bien un rectangle propre, qui est aussi une composante d'intersection pleine (voir figure 15). ■

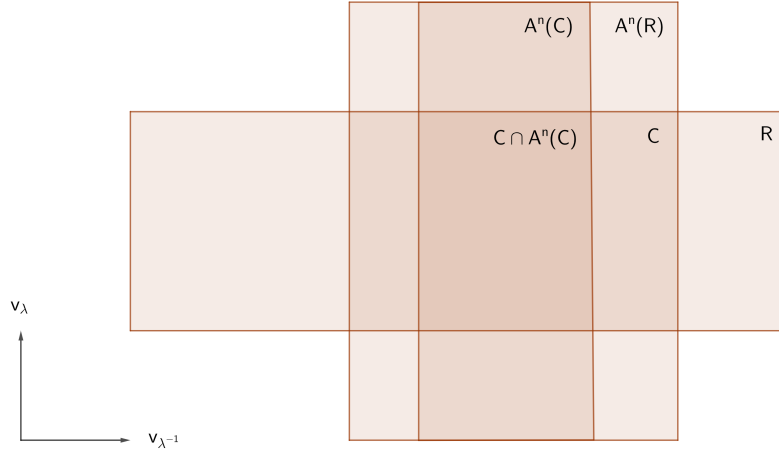


Figure 15 – $A^n(C) \subset A^n(R)$, donc les dimensions de $A^n(C)$ forcent que $A^n(C) \cap C$ est un rectangle propre plein.

Le lemme 3.9 s'applique aussi à A^{-1} en échangeant les vecteurs v_λ et $v_{\lambda^{-1}}$. La géométrie des composantes d'intersection pleines se comporte comme un attracteur de point fixe, qui permet d'obtenir une existence et unicité de point de période n (de manière équivalente, de point fixe de A^n) dans la proposition ci-dessous.

Proposition 3.10

Soient R un rectangle propre, $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- Tout point de période n appartient à une unique composante connexe de $R \cap A^n(R)$.
- Toute composante connexe *pleine* de $R \cap A^n(R)$ contient un unique point de période n .

Preuve de la proposition.

Le premier point est immédiat : si $x \in R$ est de période n , alors $x = A^n(x) \in A^n(R)$ donc $x \in R \cap A^n(R)$, notamment x appartient à une (et une seule) composante connexe de $R \cap A^n(R)$.

Soit C une composante connexe pleine de $R \cap A^n(R)$. On va montrer que $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} A^{nj}(C)$ un singleton $\{x_p\}$, ce qui montre l'existence et l'unicité d'un point fixe de A^n dans C .

- L'intersection $\bigcap_{j \geq 0} A^{nj}(C)$ a pour écriture en intersection décroissante $\bigcap_{j \geq 0} A^{nj}(C) = \bigcap_{j \geq 0} C_j$ si $C_0 := C$ et pour $j \geq 0$, $C_{j+1} := A^n(C_j) \cap C_j$. Chaque C_j est compact (comme image d'un compact par l'application continue $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$) et selon le lemme 3.9, il est non-vide, c'est même un rectangle propre de largeur ε_w et de hauteur $\lambda^{-nj} \varepsilon_h$. Donc $\bigcap_{j \geq 0} C_j$ est non vide.

Soit $[x] \in \bigcap_{j \geq 0} C_j$. On note C_x la composante connexe de $[x]$ dans $\pi([x] + E_\lambda) \cap R$.

- Pour tout $j \geq 0$, puisque C_j est une composante connexe pleine de même largeur que C , donc que R (lemme 3.9), on a $C_x \subset C_j$. Donc $C_x \subset \bigcap_{j \geq 0} C_j$.
- Réciproquement, si $[y] \in \mathbb{T}^2 \setminus C_x$, alors comme la largeur des C_j tend vers 0, il existe $j \geq 0$ tel que $[y] \notin C_j$ donc $[y] \notin \bigcap_{j \geq 0} C_j$.

Donc $\bigcap_{j \geq 0} A^{nj}(C) = \bigcap_{j \geq 0} C_j = C_x$ pour un $[x] \in C$.

- Similairement, on montre que $\bigcap_{j \leq 0} A^{nj}(C) = C_y$ pour un $[y] \in C$, où C_y est la composante connexe de $[y]$ dans $\pi([y] + E_{\lambda^{-1}}) \cap R$.

Ceci établit finalement que $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} A^{nj}(C) = \left(\bigcap_{j \geq 0} A^{nj}(C) \right) \cap \left(\bigcap_{j \leq 0} A^{nj}(C) \right) = C_x \cap C_y$ est un ensemble fini (c'est une intersection de deux rectangles propres, chaque composante connexe est nécessairement un point à cause des dimensions de chaque rectangle propre), et connexe (intersection de deux connexes), donc c'est un singleton. D'où la conclusion. ■

Corollaire 3.11

Soient R un rectangle propre, $n \in \mathbb{N}$. On note C_{pleine} le nombre de composantes connexes pleines de l'intersection $R \cap A^n(R)$, et $P_{n,R}$ le nombre de points de période n appartenant à R . Alors

$$C_{\text{pleine}} \leq P_{n,R} \leq C_{\text{pleine}} + 8.$$

Preuve du corollaire.

La proposition 3.10 minore $P_{n,R}$ par C_{pleine} et majore $P_{n,R}$ par le nombre total de composantes connexes de $R \cap A^n(R)$, lui-même majoré par $C_{\text{pleine}} + 8$ selon la proposition 3.8. ■

Remarque

Les discussions que nous avons faites sur les rectangles propres et leur relation à la cat-map sont motivées par l'outillage plus poussé de l'encodage de $(\mathbb{T}^2, A)$ à l'aide d'une partition de Markov ([HK03]).

La cat-map est mélange les rectangles propres selon l'aire Dans ce paragraphe, on démontre un cas particulier du caractère mélangeant selon l'aire (définition 2.6) du système $(\mathbb{T}^2, A)$. Il y a un intérêt pratique : donner une estimation asymptotique d'une quantité dynamique en fonction d'une aire (voir corollaire 3.15).

Théorème 3.12

Soient R_1, R_2 des rectangles propres. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2)) = \text{aire}(R_1) \text{aire}(R_2).$$

Preuve. On va d'abord montrer le résultat pour un rectangle R et un segment de droite $\mathcal{L}$ porté par v_λ suffisamment long (lemme 3.13). La preuve découle alors directement du lemme 3.14, qui appaire $A^n(R_2)$, pour n grand, à un tel segment. □

Remarque

On retrouve de ce résultat que $(\mathbb{T}^2, A)$ est topologiquement mélangeante (proposition 2.7, proposition 2.5).

Lemme 3.13

Soit $R \subset \mathbb{T}^2$ un rectangle de diamètre au plus $1/2$. Soient α irrationnel, $v := \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\ell \geq L_\varepsilon$, $y \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L} := \pi(\{y + tv : t \in [0, \ell]\})$, on a

$$\text{aire}(R) - \varepsilon \leq \frac{\text{long}(R \cap \mathcal{L})}{\text{long}(\mathcal{L})} \leq \text{aire}(R) + \varepsilon.$$

Preuve du lemme.

La preuve repose sur la proposition 1.10 portant sur l'équidistribution dans la famille des rotations irrationnelles du cercle $(\mathbb{T}^1, R)$, que l'on va appliquer « tranches par tranches » et intégrer. On rappelle l'existence d'un isomorphisme

« canonique »

$$\varphi : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1.$$

La quantité que l'on souhaite encadrer s'écrit en intégrant par tranches :

$$\frac{\text{long}(R \cap \mathcal{L})}{\text{long}(\mathcal{L})} = \frac{\int_0^1 C(s, y, R, \ell) ds}{\int_0^1 C(s, y, \ell) ds}$$

avec $C(s, y, R, \ell) := |(R \cap \mathcal{L}) \cap \mathbb{T}_s^2|$ et $C(s, y, \ell) := |\mathcal{L} \cap \mathbb{T}_s^2|$ où $\mathbb{T}_s^2 := \pi(\{s\} \times [0, 1]) = \varphi^{-1}([s] \times \mathbb{T}^1)$ est la « tranche » d'abscisse $s \in [0, 1]$.

Pour $s \in [0, 1]$ fixé, on pose $I_s = \varphi(\mathbb{T}_s^2 \setminus R) \subset \mathbb{T}^1$. On va montrer que pour le bon choix de L_ε , pour tout $\ell \geq L_\varepsilon$, $s \in [0, 1]$,

$$\text{long}(I_s) - \varepsilon \leq \frac{C(s, y, \ell) - C(s, y, R, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'} \leq \text{long}(I_s) + \varepsilon.$$

Cela suffit car $\text{aire}(R) = 1 - \int_0^1 \text{long}(I_s) ds$, donc on aurait en intégrant :

$$1 - \text{aire}(R) - \varepsilon = \int_0^1 \text{long}(I_s) ds - \varepsilon \leq 1 - \frac{\int_0^1 C(s, y, R, \ell) ds}{\int_0^1 C(s, y, \ell) ds} \leq \int_0^1 \text{long}(I_s) + \varepsilon = 1 - \text{aire}(R) + \varepsilon$$

d'où $\text{aire}(R) - \varepsilon \leq \frac{\int_0^1 C(s, y, R, \ell) ds}{\int_0^1 C(s, y, \ell) ds} \leq \text{aire}(R) + \varepsilon$ comme voulu.

— Commençons par interpréter la quantité $C(s, y, \ell) - C(s, y, R, \ell)$ par rapport au système $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$.

Soit pour $k \geq 0$, $x_s^k \in \mathbb{R}^2$ l'unique point de la tranche du plan $\{s + k\} \times \mathbb{R}$ intersectant avec $\{y + tv : t \in [k, k + 1]\}$. Si $\varphi([x_s^0]) = ([s], [x_s])$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi([x_s^k]) = ([s], [x_s + k\alpha]) = ([s], R_\alpha^k([x_s])).$$

Comme α est irrationnel, l'orbite de $[x_s]$ par R_α n'est pas périodique, donc les $[x_s^k]$ sont deux-à-deux distincts. On a donc

$$\mathcal{L} \cap \pi(\{s\} \times [0, 1]) = \{[x_s^k] : k = 0, \dots, C(s, y, \ell) - 1\},$$

d'où

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} \cap \pi(\{s\} \times [0, 1])) \setminus (R \cap \mathcal{L} \cap \pi(\{s\} \times [0, 1])) &= \{[x_s^k] : [x_s^k] \in \mathbb{T}^2 \setminus R, k = 0, \dots, C(s, y, \ell) - 1\} \\ &= \{[x_s^k] : R_\alpha^k([x_s]) \in I_s, k = 0, \dots, C(s, y, \ell) - 1\} \end{aligned}$$

Donc en reprenant la notation de la proposition 1.10, comme $(R \cap \mathcal{L}) \cap \mathbb{T}_s^2 \subset \mathcal{L} \cap \mathbb{T}_s^2$:

$$C(s, y, \ell) - C(s, y, R, \ell) = C([x_s], I_s, C(s, y, \ell)).$$

— Comme le diamètre de R est inférieur à $1/2$, on a nécessairement $\text{long}(I_s) \geq 1/2$. Selon la proposition 1.10, soit $N_0 \geq 2$ entier tel que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{T}^1$, $\text{long}(I) \geq 1/2$,

$$\forall n \geq N_0, \quad \text{long}(I) - \varepsilon/3 \leq \frac{C([x_s], I, n)}{n} \leq \text{long}(I) + \varepsilon/3, \quad \frac{1}{n-1} \leq \varepsilon/3. \quad (3)$$

Soit $L_\varepsilon > 0$ tel que $C(s, y, \ell) \geq N_0$ pour tout choix de $\ell \geq L_\varepsilon$ (possible car $C(s, y, \ell) \rightarrow \infty$ lorsque $\ell \rightarrow \infty$). Cette quantité est bien indépendante de s .

On a

$$\frac{C(s, y, \ell) - C(s, y, R, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'} = \frac{C([x_s], I_s, C(s, y, \ell))}{C(s, y, \ell)} \frac{C(s, y, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'}$$

avec l'estimation de distribution uniforme sur I_s (issue de l'équation 3)

$$\text{long}(I_s) - \varepsilon/3 \leq \frac{C([x_s], I_s, C(s, y, \ell))}{C(s, y, \ell)} \leq \text{long}(I_s) + \varepsilon/3$$

et puisque $|C(s', y, \ell) - C(s'', y, \ell)| \leq 1$ pour tous $s', s'' \in [0, 1[$ et $C(s, y, \ell) \geq N_0$:

$$\frac{C(s, y, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'} \leq \frac{C(s, y, \ell)}{C(s, y, \ell) - 1} = 1 + \frac{1}{C(s, y, \ell) - 1} \leq 1 + \varepsilon/3,$$

$$\frac{C(s, y, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'} \geq \frac{C(s, y, \ell)}{C(s, y, \ell) + 1} = 1 - \frac{1}{C(s, y, \ell) + 1} \geq 1 - \varepsilon/3$$

donc

$$(\text{long}(I_s) - \varepsilon/3)(1 - \varepsilon/3) \leq \frac{C(s, y, \ell) - C(s, y, R, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'} \leq (\text{long}(I_s) + \varepsilon/3)(1 + \varepsilon/3).$$

Comme on peut supposer $\varepsilon \leq 1$ et comme $\text{long}(I_s) \leq 1$, on trouve finalement

$$\text{long}(I_s) - \varepsilon \leq \frac{C(s, y, \ell) - C(s, y, R, \ell)}{\int_0^1 C(s', y, \ell) ds'} \leq \text{long}(I_s) + \varepsilon.$$

Le théorème 3.12 est conséquence directe du lemme 3.14 ci-dessous.

Lemme 3.14

Soient $R_1 = R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h)$, $R_2 = R([y], \tilde{\varepsilon}_w, \tilde{\varepsilon}_h)$ des rectangles propres. On pose $\mathcal{L} := \pi(\{y + t v_\lambda; t \in [0, \tilde{\varepsilon}_w]\})$ (le côté bas de R_2) puis $\mathcal{L}_n := A^n(\mathcal{L})$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2))}{\text{aire}(R_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)} = \text{aire}(R_1).$$

Preuve du lemme.

Fixons $n \in \mathbb{N}$, suffisamment grand pour que $\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w \geq \varepsilon_w$ et $\lambda^{-n} \tilde{\varepsilon}_h \leq \varepsilon_h$. Selon la proposition 3.8, l'intersection de rectangles propres $R_1 \cap A^n(R_2)$ est une réunion de rectangles propres, dont

- un nombre fini $C_{\text{pleine}}(n)$ de composantes pleines, de largeur exactement ε_w et de hauteur exactement $\lambda^{-n} \tilde{\varepsilon}_h$
- au plus huit composantes non pleines, de largeur au plus ε_w et de hauteur au plus $\lambda^{-n} \tilde{\varepsilon}_h$.

Également, $\text{aire}(R_2) = \tilde{\varepsilon}_w \tilde{\varepsilon}_h$.

Ainsi

$$\frac{C_{\text{pleine}}(n) \times \varepsilon_w \times \lambda^{-n} \tilde{\varepsilon}_h}{\tilde{\varepsilon}_w \tilde{\varepsilon}_h} \leq \frac{\text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2))}{\text{aire}(R_2)} \leq \frac{(C_{\text{pleine}}(n) + 8) \times \varepsilon_w \times \lambda^{-n} \tilde{\varepsilon}_h}{\tilde{\varepsilon}_w \tilde{\varepsilon}_h}. \quad (4)$$

De même, l'intersection $R_1 \cap \mathcal{L}_n$ est une réunion de segments de droites (les côtés bas des rectangles propres constituant l'intersection $R_1 \cap A^n(R_2)$). On a exactement :

- $C_{\text{pleine}}(n)$ segments de longueur ε_w
- au plus huit autres segments, de longueur au plus ε_w .

Aussi, $\text{long}(\mathcal{L}_n) = \lambda^n \tilde{\varepsilon}_w$. Donc

$$\frac{C_{\text{pleine}}(n) \times \varepsilon_w}{\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w} \leq \frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)} \leq \frac{(C_{\text{pleine}}(n) + 8) \times \varepsilon_w}{\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w}. \quad (5)$$

Quitte à découper R_1 en un nombre fini de rectangles propres disjoints de diamètre au plus $1/2$ et à sommer les quantités, puisque v_λ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$, avec $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ irrationnel, le lemme 3.13 s'applique et on a notamment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)} = \text{aire}(R_1).$$

Donc, comme selon l'encadrement précédent (équation 5)

$$\frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)} - \frac{8\varepsilon_w}{\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w} \leq \frac{C_{\text{pleine}}(n)\varepsilon_w}{\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w} \leq \frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)}$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{\text{pleine}}(n) \varepsilon_w}{\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)} = \text{aire}(R_1).$$

Selon l'équation 4, on a finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2))}{\text{aire}(R_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{\text{pleine}}(n) \varepsilon_w}{\lambda^n \tilde{\varepsilon}_w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{long}(R_1 \cap \mathcal{L}_n)}{\text{long}(\mathcal{L}_n)} = \text{aire}(R_1).$$

Remarque

L'utilisation de la proposition 1.10 pour la preuve d'un résultat de mélange n'est pas une coïncidence. La proposition donne en effet déjà un résultat proche d'une propriété de mélange sur $(\mathbb{T}^1, R)$. Si $0 < \varepsilon \leq \ell \leq 1$ et $N = N(\varepsilon, \ell)$ issus de la proposition sont donnés, on a pour tous I_1, I_2 intervalles de $\mathbb{T}^1$, $\text{long}(I_1) \geq \ell$, $n \geq N$:

$$\forall [x] \in \mathbb{T}^1, \quad \text{long}(I_1) - \varepsilon \leq \frac{C([x], I_1, n)}{n} \leq \text{long}(I_1) + \varepsilon$$

donc en intégrant sur I_2 , comme

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{C([x], I_1, n)}{n} \mathbf{1}_{I_2}([x]) dx &= \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{R^{-k}(I_1)}([x]) \mathbf{1}_{I_2}([x]) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \mathbf{1}_{R^{-k}(I_1) \cap I_2}([x]) dx \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{long}(R^{-k}(I_1) \cap I_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{long}(I_1 \cap R^k(I_2)), \end{aligned}$$

on a

$$\text{long}(I_2)(\text{long}(I_1) - \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{long}(I_1 \cap R^k(I_2)) \leq \text{long}(I_2)(\text{long}(I_1) + \varepsilon),$$

ce qui indique donc une convergence au sens de Césàro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{long}(I_1 \cap R^k(I_2)) = \text{long}(I_1) \text{long}(I_2).$$

Le système $(\mathbb{T}^1, R)$ n'est cependant pas mélangeant selon l'aire, puisqu'il n'est même pas topologiquement mélangeant (proposition 2.5).

On a le corollaire suivant. Avec la proposition 3.10, ce résultat fait le lien entre le nombre de points n -périodiques d'un rectangle propre et une aire. Il s'agit là encore d'un exemple de la correspondance heuristique « dénombrement – mesure ».

Corollaire 3.15

Soient $R_1 = R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h)$, $R_2 = R([y], \tilde{\varepsilon}_w, \tilde{\varepsilon}_h)$ des rectangles propres. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $C_{\text{pleine}} = C_{\text{pleine}}(n)$ le nombre de composantes d'intersections pleines de l'intersection $R_1 \cap A^n(R_2)$. Alors

$$C_{\text{pleine}}(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\text{aire}(R_1) \text{aire}(R_2)}{\varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h} \lambda^n.$$

Preuve du corollaire.

On reprend les notations de la preuve du lemme 3.14. Pour n suffisamment grand, toutes les composantes d'intersection (pas nécessairement pleines) ont une aire inférieure à $\lambda^{-n} \varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h$, il y a au plus $C_{\text{pleine}}(n) + 8$, dont $C_{\text{pleine}}(n)$ d'aire exactement $\lambda^{-n} \varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h$. Ainsi

$$C_{\text{pleine}}(n) \lambda^{-n} \varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h \leq \text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2)) \leq (C_{\text{pleine}}(n) + 8) \lambda^{-n} \varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h$$

i.e.

$$\frac{\text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2))}{\varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h} \lambda^n - 8 \leq C_{\text{pleine}}(n) \leq \frac{\text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2))}{\varepsilon_w \tilde{\varepsilon}_h} \lambda^n.$$

Selon le théorème 3.12, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{aire}(R_1 \cap A^n(R_2)) = \text{aire}(R_1) \text{aire}(R_2)$, on retrouve donc bien l'équivalent. ■

Finalisation de la preuve On peut maintenant finaliser la preuve.

Proposition 3.16

Soit R un rectangle propre. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_{n,R}$ le nombre de points de R de période n . Alors

$$P_{n,R} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^n \text{aire}(R).$$

Preuve de la proposition.

Écrivons $R = R([x], \varepsilon_w, \varepsilon_h)$. Selon le corollaire 3.15, si $C_{\text{pleine}}(n)$ est le nombre de composantes connexes pleines de $R \cap A^n(R)$, alors

$$C_{\text{pleine}}(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^n \frac{\text{aire}(R)^2}{\varepsilon_w \varepsilon_h} = \lambda^n \text{aire}(R).$$

Mais selon le corollaire 3.11

$$P_{n,R} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C_{\text{pleine}}(n),$$

d'où la conclusion. ■

Lemme 3.17

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux familles finies de rectangles de la forme $R(x, \varepsilon_w, \varepsilon_h) \subset \mathbb{R}^2$,

$$(R_1, \dots, R_{n_1}) \text{ et } (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{n_2})$$

tels que

$$\bigcup_{j=1}^{n_2} \tilde{R}_j \subset [0,1]^2 \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} R_j, \quad \sum_{j=1}^{n_2} \text{aire}(\tilde{R}_j) \geq 1 - \varepsilon, \quad \sum_{j=1}^{n_1} \text{aire}(R_j) \leq 1 + \varepsilon.$$

Preuve du lemme.

La figure 16 illustre le procédé. En découpant d'une manière adaptée le carré $[0,1]^2$, on se ramène alors au problème du recouvrement d'un triangle rectangle. On peut aligner des rectangles propres de même hauteur $\ell/2^k$ pour recouvrir le triangle rectangle (resp. inscrire leur réunion dans le triangle rectangle). Pour k suffisamment grand, on obtient bien la condition voulue, puisque l'aire dépassante (resp. manquante) est majorée par

$$\ell \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^2}}{2^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Fixons $0 < \varepsilon < 1$. On se donne les deux familles du lemme 3.17 pour $\varepsilon/3$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

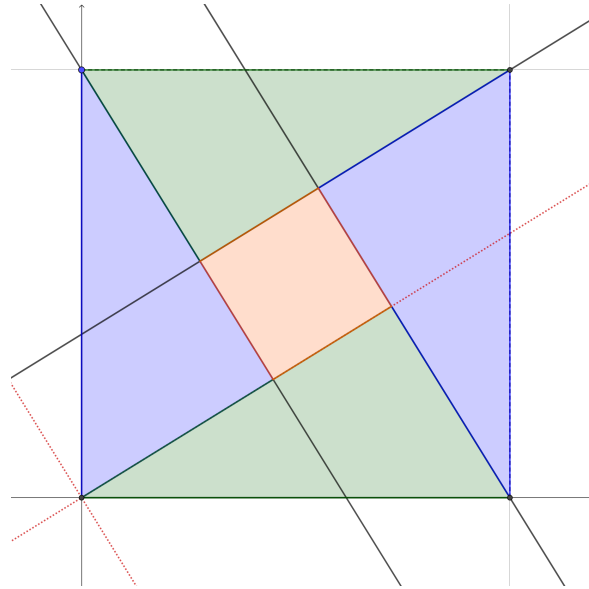
$$\sum_{j=1}^{n_2} P_{n, \tilde{R}_j} \leq P_n \leq \sum_{j=1}^{n_1} P_{n, R_j}.$$

Selon la proposition 3.16, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

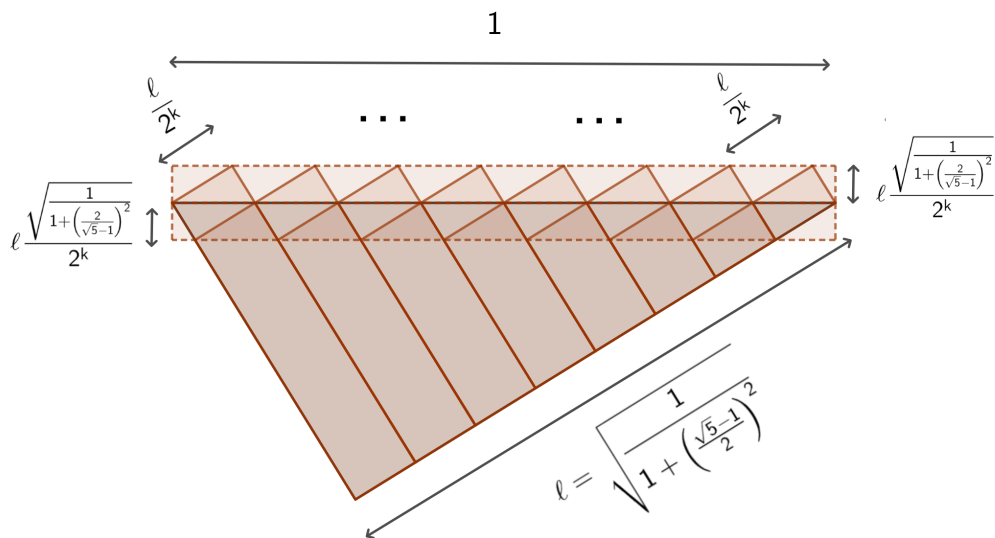
$$\forall j \in \{1, \dots, n_1\}, P_{n, R_j} \leq \lambda^n \text{aire}(R_j)(1 + \varepsilon/3), \quad \forall j \in \{1, \dots, n_2\}, P_{n, \tilde{R}_j} \geq \lambda^n \text{aire}(\tilde{R}_j)(1 - \varepsilon/3)$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n_1} P_{n, R_j} \leq \lambda^n (1 + \varepsilon/3)^2, \quad \sum_{j=1}^{n_2} P_{n, \tilde{R}_j} \geq \lambda^n (1 - \varepsilon/3)^2.$$



(a) Découpage de $[0,1]^2$ en quatre triangles rectangle et un carré



(b) Recouvrement et inscription d'un triangle rectangle ($k = 3$)

Figure 16 – Illustration de la preuve du lemme 3.17.

Donc pour $n \geq N$,

$$\lambda^n(1 - \varepsilon/3)^2 \leq P_n \leq \lambda^n(1 + \varepsilon/3)^2$$

d'où

$$\lambda^n(1 - \varepsilon) \leq P_n \leq \lambda^n(1 + \varepsilon).$$

On a bien établi l'égalité (1) du théorème 3.3 :

$$P_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^n.$$

Remarques conclusives

La relation asymptotique entre croissances des orbites périodiques et entropie topologique a été observée dans ce rapport pour les systèmes étudiés ici, mais il est facile de construire des systèmes où elle n'est pas vérifiée, même chaotiques. Soit en effet le système *produit* $(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1, A \times R_\alpha)$ défini par

$$\begin{cases} \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1 & \longrightarrow & \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1 \\ ([x], [y]) & \longmapsto & (A([x]), R_\alpha([y])). \end{cases}$$

Au sens de l'entropie topologique, ce système est chaotique car pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1$, ε -fin pour d_n :

$$1 = \text{aire} \otimes \text{long}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1) \leq \text{aire} \otimes \text{long}(\mathcal{U}) \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \text{aire} \otimes \text{long}(U) \leq |\mathcal{U}| \times \lambda^{-n} \varepsilon^2 \times \varepsilon$$

donc

$$|\mathcal{U}| \geq \lambda^n \varepsilon^{-3}$$

d'où $D(A \times R_\alpha, n, \varepsilon) \geq \lambda^n \varepsilon^{-3}$ donc

$$h_{\text{top}}(A \times R_\alpha) \geq \ln \lambda > 0.$$

Pourtant, $([x], [y]) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1$ est de période n si et seulement si $[x]$ est de période n et $[y]$ est de période n . Selon les propriétés de $(\mathbb{T}^1, R_\alpha)$, $[y]$ n'est pas périodique pour presque tout n . Donc pour presque tout n ,

$$P_n(A \times R_\alpha) = 0.$$

Références

- [AA89] V. I. Arnold and A. Avez. *Ergodic problems of classical mechanics*. Addison-Wesley, 1989.
- [HK03] Boris Hasselblatt and Anatole Katok. *A First Course in Dynamics : with a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, 2003.
- [Wea16] Bryce Weaver. Introduction to complicated behavior and periodic orbits. In Françoise Dal'Bo, François Ledrappier, and Amie Wilkinson, editors, *EMS Series of Lectures in Mathematics*, volume 26, pages 57–100. EMS Press, 1 edition, November 2016.