

PRÉSENTATION DU DOMAINE DE RECHERCHE ET RAPPORT SUR LES TRAVAUX

MARTIN MION-MOUTON

Ce texte est une présentation des domaines dans lesquels s'inscrivent mes recherches et de mes travaux. J'en présente dans la section 1 un panorama général et un résumé. Les quatre sections qui suivent peuvent être lues de manière indépendantes. Les sections 2, 3 et 4 nourrissent des liens qui apparaîtront au fil du texte, sans ce que cela empêche de les lire indépendamment. La section 5 est de son côté totalement autonome et distincte des trois autres. Elle présente mes travaux les plus actuels, dans une direction nouvelle qui constitue désormais une partie importante de mon travail et de mes projets de recherche (présentés dans le texte joint à ce rapport). Les résultats (numérotés en lettres majuscules de A à H) et publications présentés dans ce rapport sont respectivement listés dans l'[index des résultats](#) et l'[index bibliographique](#) joints.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|----|
| 1. Introduction | 1 |
| 1.1. Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins (§2 et §3) | 2 |
| 1.2. Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (§4) | 2 |
| 1.3. Rigidité des tores de-Sitter singuliers vis-à-vis des feuilletages lumières (§5) | 3 |
| 2. Rigidité des dynamiques (partiellement) hyperboliques | 4 |
| 2.1. Difféomorphismes partiellement hyperboliques et flots Anosov | 4 |
| 2.2. Régularité des fibrés invariants et rigidité des flots Anosov de contact | 5 |
| 2.3. Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact | 6 |
| 3. Rigidité des géométries de chemins et géométries de Cartan | 7 |
| 3.1. Géométries de chemins, géométries de Cartan et structures drapeaux | 7 |
| 3.2. Programme de d'Ambra-Gromov pour les géométries de chemins | 8 |
| 4. Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois | 10 |
| 4.1. Structures drapeaux exotiques en dimension trois | 10 |
| 4.2. Compactifications géométriques de flots géodésiques | 11 |
| 5. Rigidité des tores de-Sitter singuliers vis-à-vis des feuilletages lumières | 11 |
| 5.1. Torres de-Sitter singuliers | 12 |
| 5.2. Uniformisation des tores de-Sitter singuliers | 13 |
| 5.3. Rigidité géométrique des feuilletages lumière | 14 |
| Index des résultats présentés | 14 |
| Index bibliographique des publications présentées | 15 |
| Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins (§2 et §3) | 15 |
| Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (§4) | 15 |
| Rigidité des tores de-Sitter singuliers vis-à-vis des feuilletages lumières (§5) | 15 |
| Bibliographie | 15 |

1. INTRODUCTION

Mon travail de recherche se situe à l'intersection de la géométrie différentielle et des systèmes dynamiques. Je m'intéresse d'une manière générale aux questions faisant interagir les objets et méthodes provenant de ces deux domaines. Le thème unifiant l'essentiel de mes travaux et intérêts de recherche est l'exploration de *phénomènes de rigidité* apparaissant en présence d'un système dynamique « assez riche » préservant une structure géométrique « assez rigide ». Selon les questions

étudiées, la rigidité peut être tour à tour imposée par la dynamique sur la géométrie, ou vice-versa. Mes travaux s'inscrivent au sein de trois axes de recherche principaux que j'introduis maintenant.

1.1. Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins (sections 2 et 3). Les *systèmes (partiellement) hyperboliques* forment une large famille de systèmes dynamiques définis sur les variétés différentielles compactes. Leur étude, en grande partie motivée par leurs liens avec diverses questions de stabilité et de robustesse¹, s'est progressivement imposée comme un sujet de recherche majeur au sein des systèmes dynamiques.² Ces systèmes sont caractérisés par l'existence d'une *structure géométrique* préservée par leurs différentielles, qui est une décomposition du fibré tangent en somme de trois fibrés invariants. Les exemples fondamentaux de tels systèmes sont d'origine algébrique. Bien que les fibrés invariants soient en général seulement continus, ils sont *lisses* (i.e. de classe C^∞) pour ces *exemples algébriques*.

Le rôle central joué par le degré de régularité des fibrés invariants a été mis en évidence dès les origines de la théorie [Ano69], et l'on s'attend à ce que les exemples algébriques soient « les seuls » dont les fibrés invariants sont lisses. On peut plus précisément se demander : *tout système dont les fibrés invariants sont lisses est-il conjugué de manière lisse à un exemple algébrique ?*³ Cette question a motivé de nombreux travaux [Ghy87 ; Kan88 ; HK90 ; BFL92 ; BL93 ; Fan05] qui y ont apporté des réponses positives dans le cas des *flots Anosov* ou difféomorphismes Anosov. Le cas des *difféomorphismes partiellement hyperboliques* introduit des problématiques nouvelles qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes utilisées dans le cas Anosov. Les travaux présentés dans la section 2 initient l'étude de cette question dans le cas partiellement hyperbolique. J'obtiens dans [Mio22b] un *résultat de classification des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact à fibrés invariants lisses* (théorème A).

Ce résultat de classification dynamique est d'origine géométrique. Il repose sur un phénomène de *rigidité* qui peut être résumé informellement de la manière suivante. « Une structure géométrique suffisamment rigide et admettant des automorphismes dont la dynamique est suffisamment riche doit être particulièrement symétrique » (et est donc susceptible d'être classifiable). Cette heuristique est inspirée par un résultat de Ferrand-Obata [Oba71 ; Fer96] sur les variétés Riemanniennes compactes dont le groupe de transformations conformes est non-compact. Elle est à l'origine d'un vaste programme de recherche suggéré par d'Ambra-Gromov [GD91] au sujet des structures géométriques rigides à « grand » groupe d'automorphismes, qui a suscité de nombreux travaux tout particulièrement dans le cas Lorentzien [Zeg99 ; Fra20 ; MP22 ; Dum+25].

La structure géométrique invariante par un difféomorphisme partiellement hyperbolique de contact est appelée *géométrie de chemins* [Car24 ; Tak94]. Elle est *rigide* en un sens rendu précis par la notion de *géométrie de Cartan* [Car10 ; ČS09], ce qui permet de lui appliquer l'heuristique précédente. Ces objets géométriques sont introduits à la section 3, où deux résultats de rigidité sont présentés dans la direction du programme de d'Ambra-Gromov (théorèmes B et C).

1.2. Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (section 4). L'un des principaux intérêts des géométries de Cartan est d'introduire la notion de *courbure* d'une géométrie de chemins. Cela motive à débiter l'étude des géométries de chemins par celles dont la courbure est nulle, qui sont les variétés de dimension trois modelées sur l'*espace des drapeaux* complets de \mathbb{R}^3 noté \mathbf{X} , sous l'action du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$. Ceci est formalisé par la notion de $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -structures, que nous appellerons *structures drapeaux* par commodité.

Ces dernières constituent l'un des plus simples exemples de structures géométriques localement homogènes en dimension trois dont l'espace homogène sous-jacent est de *rang* supérieur ou égal à deux.⁴ Ces espaces homogènes G/P « de rang supérieur » suscitent depuis une vingtaine d'année un fort intérêt à travers la famille des *représentations Anosov* de groupes discrets dans G qui leur sont associées [Lab06 ; GW12 ; Gué+17]. Les structures sous-jacentes ont en revanche très peu été étudiées d'un point de vue géométrique ([Fra04 ; GW08 ; LM24 ; NR25] faisant partie des rares exemples). En comparaison de l'avancée importante du domaine du point de vue des espaces de

1. La *transitivité robuste* impose par exemple à un difféomorphisme d'une variété fermée de dimension trois d'être *partiellement hyperbolique* selon [DPU99 ; BDP03] (voir par exemple [Pot18, §2] pour plus de détails).

2. On renvoie à l'excellent survol [Pot18] du domaine pour un exposé de ses motivations et questions principales.

3. Deux homéomorphismes f et g sont *conjugués* par φ si $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

4. Le *rang réel* de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est la dimension de son sous-groupe de matrices diagonales, qui est égale à 2.

représentations appelés *variétés des caractères*, la compréhension des phénomènes géométriques spécifiques au rang supérieur demeure ainsi très faible. Cela invite à améliorer notre connaissance de la géométrie et de la topologie des variétés de dimension trois portant une structure drapeaux. L'une des motivations est de mettre en évidence dans ce cas concret d'*espace de Teichmüller de rang supérieur* des comportements pouvant peut-être suggérer des phénomènes plus généraux.

Les travaux présentés dans la section 4 s'inscrivent dans cette démarche. L'une des premières nécessités en présence d'une nouvelle famille d'objets est de disposer d'une large source d'exemples. Pour les structures Riemanniennes conformes ou CR, ceci est fourni par le recollement de deux structures préexistantes le long de leur somme connexe [Kul78 ; BS76]. Le rang supérieur à deux empêche une telle construction dans le cas des structures drapeaux, pour lesquelles nous avons mis en évidence un phénomène nouveau avec Elisha Falbel dans [FM24]. C'est dans leur cas le long de *corps-en-anses de genre deux* que deux structures peuvent être recollées (théorème D), ce qui nous permet de construire de nouvelles structures drapeaux « exotiques » *non-uniformisables* (théorème E). Dans la perspective du programme de d'Ambra-Gromov, on peut également chercher à construire des exemples de structures drapeaux dont l'on contrôle les propriétés dynamiques du groupe d'*automorphismes* (théorème F).

1.3. Rigidité des tores de-Sitter singuliers vis-à-vis des feuilletages lumières (section 5). Les *surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante* sont une famille de structures géométriques localement homogènes singulières en dimension deux. Elles ressemblent par certains aspects aux surfaces de translation [Zor06 ; Yoc10] ou de dilatation [DFG19 ; BGT25]. Si la notion locale de *singularité conique Lorentzienne* avait été introduite dans [BBS11], ces surfaces n'étaient pas encore apparues comme objet d'étude indépendant dans la littérature. J'initie dans [Mio24] leur étude globale et en fournis une large classe d'exemples.

Le théorème d'uniformisation de Klein-Poincaré montre que toute *classe conforme de métriques Riemanniennes* sur une surface fermée⁵ contient une unique métrique à courbure constante, ce que prolongent les travaux de Troyanov [Tro86 ; Tro91] pour les métriques Riemanniennes singulières. Ces résultats peuvent être informellement résumés comme répondant positivement à la question suivante : *toute classe conforme contient-elle une métrique à courbure constante, et si oui est-elle unique ?* Les travaux présentés à la section 5 contribuent à cette question d'*uniformisation* dans le cas Lorentzien. Ils fournissent une *description partielle de l'espace de déformation des tores de-Sitter à une singularité par la dynamique de leurs feuilletages lumières* (théorème G).

Les tores de-Sitter singuliers portent en effet un système dynamique d'origine géométrique : une paire de *feuilletages lumières transverses*.⁶ Dans les cas qui nous intéressent, ces feuilletages sont les suspensions de *difféomorphismes par morceaux du cercle*, qui sont topologiquement conjugués à des rotations [Den32] lorsqu'ils sont *minimaux* (i.e. lorsque toutes leurs orbites sont denses). Cette *linéarisation* est cependant seulement continue en général. Les sauts des dérivées fournissent des obstructions évidentes à une conjugaison lisse, et l'on peut se demander si ce sont les seules. C'est un avatar de la question suivante connue sous le nom de *rigidité géométrique* : *si deux systèmes dynamiques sans orbite périodique (et satisfaisant les obstructions évidentes s'il y a lieu) sont topologiquement conjugués, sont-ils conjugués par une application lisse ?*⁷

Si des réponses positives à cette question sont connues dans le cas des difféomorphismes du cercle [Arn64 ; Her79 ; Yoc84], elle demeure largement ouverte pour les difféomorphismes par morceaux du cercle. Dans leur cas, la réponse n'est connue (et positive) que dans le cas d'une unique singularité [KKM17]. Les travaux présentés à la section 5 apportent une réponse positive à cette question pour les feuilletages lumières des tores de-Sitter, à travers le résultat suivant. *Entre deux tores de-Sitter ayant une unique singularité du même angle et des feuilletages lumières minimaux, toute équivalence topologique entre les bi-feuilletages lumières est une isométrie* (théorème H). Ce

5. I.e. l'ensemble des métriques pg avec g une métrique Riemannienne et ρ une fonction lisse strictement positive. Une telle classe conforme est équivalente à une *structure complexe* sur la surface.

6. L'existence de feuilletages induits par la géométrie peut être rapprochée du cas des surfaces de translation ou de dilatation. À la différence de ces dernières qui admettent une *famille à un paramètre* de feuilletages directionnels, une *paire* de feuilletages est cependant ici singularisée.

7. Voir [Gha21, §1] pour un panorama général et historique sur cette question.

résultat est intimement lié à la rigidité géométrique des difféomorphismes par morceaux du cercle, ce qui fait l'objet d'un projet de recherche présenté dans le programme joint à ce rapport.

2. RIGIDITÉ DES DYNAMIQUES (PARTIELLEMENT) HYPERBOLIQUES

Le premier axe de mes travaux de recherche est motivé par un phénomène reliant les *systèmes dynamiques (partiellement) hyperboliques* à la géométrie. Ces systèmes préservent par nature une *structure géométrique d'origine dynamique*. Cette dernière est en général peu régulière, mais elle est lisse pour les *plus symétriques* et les mieux compris de ces systèmes, qui sont d'origine algébrique. Lorsque la structure géométrique invariante produite par la dynamique est régulière, on peut réciproquement se demander si cela impose à la dynamique d'être particulièrement symétrique, *i.e.* conjuguée à un exemple algébrique. Les travaux présentés dans cette section s'inscrivent au sein de cette question.

2.1. Difféomorphismes partiellement hyperboliques et flots Anosov. La richesse des exemples suivants de systèmes dynamiques en dimension trois constituent une motivation importante pour la théorie des systèmes (partiellement) hyperboliques. On dira qu'une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est *hyperbolique* si toutes ses valeurs propres sont de module différent de 1, et *partiellement hyperbolique* si au moins deux de ses valeurs propres le sont.

Exemples 2.1 (Exemples algébriques en dimension trois). (1) Une matrice partiellement hyperbolique $A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ définit un *automorphisme linéaire* f_A du tore $M^3 = \mathbf{T}^3 := \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

(2) Pour $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique, le groupe d'Heisenberg $\mathrm{Heis}(3) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ admet un unique automorphisme ϕ de différentielle $A \times \mathrm{id}$ en l'identité dans une base adaptée. Ce dernier induit sur le quotient $M^3 = \Gamma \backslash \mathrm{Heis}(3)$ par un sous-groupe discret cocompact Γ de $\mathrm{Heis}(3)$ un *automorphisme partiellement hyperbolique de nil-variété* (voir [Mio22b, §1.1] pour plus de détails).

(3) Pour $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique, la translation verticale $(x, s) \mapsto (x, s + t)$ induit sur le quotient $M^3 = \mathbf{T}^2 \times [0; 1]/\{(x, 1) \sim (f_A(x), 0)\}$ un flot (φ^t) appelé *suspension de A*.

(4) Soit S une surface hyperbolique fermée, et $\gamma_{x,v}(t)$ la géodésique paramétrée à vitesse 1 partant d'un point $x = \gamma_{x,v}(0) \in S$ dans une direction $v = \gamma'_{x,v}(0) \in T_x^1 S$. Ceci définit sur le fibré unitaire tangent $M^3 = T^1 S$ le *flot géodésique* $\varphi^t: (x, v) \in T^1 S \mapsto \gamma'_{x,v}(t) \in T^1 S$.

Les travaux fondateurs d'Anosov [Ano69] ont montré que la propriété essentielle commune à ces quatre systèmes et qui fait la richesse de leur dynamique, est l'existence d'une décomposition du fibré tangent à M en somme de *fibrés invariants*

$$(2.1) \quad TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

tel que pour tout $x \in M$: $D_x f(E^\sigma(x)) = E^\sigma(f(x))$ pour $\sigma = s, c, u$ (et $D_x \varphi^t(E^\sigma(x)) = E^\sigma(\varphi^t(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dans le cas d'un flot). Pour les automorphismes linéaires f_A du tore \mathbf{T}^3 (exemple 2.1.(1)), les fibrés E^s , E^c et E^u sont les projections respectives sur \mathbf{T}^3 des droites propres de A dont le module des valeurs propres est respectivement strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à 1. Dynamiquement, cela signifie que E^s (respectivement E^u) est *uniformément contracté* (resp. *dilaté*) par les itérées de f , au sens où il existe un temps $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout point $x \in M$ et tout vecteur unitaire $v^s \in E^s(x)$ (resp. $v^u \in E^u(x)$) :

$$(2.2) \quad \|D_x f^N(v^s)\| < 1 \text{ (resp. } \|D_x f^N(v^u)\| > 1)$$

avec $\|\cdot\|$ une métrique Riemannienne sur M .⁸ Dans le cas d'un flot $(\varphi_X^t)_{t \in \mathbb{R}}$, le troisième fibré *central* $E^c(x) = \mathbb{R}X(x)$ est simplement le champ de droites dirigé par le champ de vecteur $X(x) = \frac{d\varphi_X^t(x)}{dt}|_{t=0}$ définissant le flot. Dans le cas d'un difféomorphisme, E^c est uniformément exponentiellement moins contracté (resp. dilaté) que E^s (resp. E^u), et on dit alors que la décomposition (2.1) est *dominée*.⁹ Ces dynamiques sont illustrées par la figure 2.1.

8. Notons que ces propriétés sont indépendantes de la métrique choisie puisque M est compacte.

9. Cette notion ne jouant aucun rôle dans les résultats présentés dans ce texte, nous ne nous y attardons pas dessus.

Définition 2.2. Un difféomorphisme f (resp. un flot $(\varphi_X^t)_{t \in \mathbb{R}}$) d'une variété M fermée est dit *partiellement hyperbolique* (resp. *Anosov*) s'il préserve une décomposition de la forme (2.1), et si :

- E^s et E^u sont uniformément contractés et dilatés au sens de (2.2),
- la décomposition est dominée (resp. $E^c(x) = \mathbb{R}X(x)$).

On renvoie par exemple à [Pot18, §1] et [Pot25] pour plus de détails.

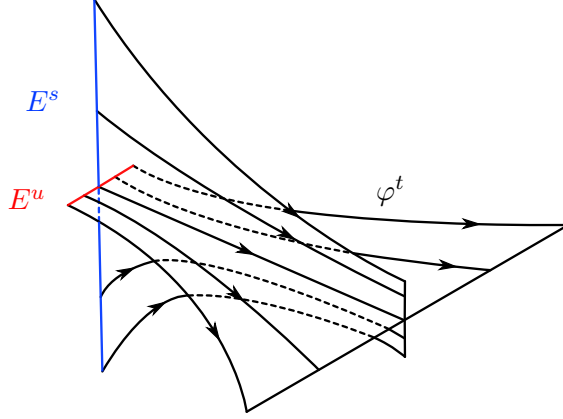


FIGURE 2.1. Structure locale d'un flot Anosov (φ^t) .

La définition 2.2 est faite pour généraliser les exemples algébriques 2.1 : les automorphismes des tores (1) et des nil-variétés (2) sont des difféomorphismes partiellement hyperboliques, tandis que les suspensions (3) et les flots géodésiques de surfaces hyperboliques (4) sont des flots Anosov. La définition 2.2 est par ailleurs motivée par le fait que les systèmes considérés forment un *ouvert* : toute déformation d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique (respectivement d'un flot Anosov) qui est assez petite en topologie \mathcal{C}^1 demeure partiellement hyperbolique (resp. Anosov). Il existe de plus de nombreux exemples de flots Anosov et de difféomorphismes partiellement hyperboliques *non-algébriques* en dimension trois (voir par exemple [Pot18, §3]). Notons enfin que le temps un d'un flot Anosov est un difféomorphisme partiellement hyperbolique. Les flots Anosov fournissent ainsi des cas particuliers de difféomorphismes partiellement hyperboliques dont la dynamique est singulièrement rigide (par exemple, ils sont isotopes à l'identité).

2.2. Régularité des fibrés invariants et rigidité des flots Anosov de contact. La notion d'hyperbolicité (partielle) mettant en avant l'existence d'une *structure géométrique invariante par la dynamique*, il est naturel de s'intéresser aux propriétés de cette structure, et pour commencer à sa *régularité*. On peut montrer que la définition 2.2 rend les fibrés invariants $E^s/c/u$ automatiquement *continus*, dû à leur origine dynamique. Ces derniers sont par ailleurs *lisses* (i.e. de classe \mathcal{C}^∞) pour les exemples algébriques 2.1. Il est cependant connu depuis Anosov [Ano69, Chapter 24] que les fibrés invariants d'une petite déformation d'un exemple algébrique ne sont plus lisses, ce qui a des conséquences dynamiques importantes (par exemple sur la *théorie ergodique* de ces systèmes). Il est pour cette raison important de comprendre si les systèmes algébriques sont « les seuls dont les fibrés invariants sont lisses », ce qui se formule plus précisément ainsi.

Question 2.3. Les systèmes dynamiques (partiellement) hyperboliques dont les fibrés invariants sont lisses sont-ils conjugués¹⁰ par une application lisse à des exemples algébriques ?

Cette question a suscité un fort intérêt, de nombreux travaux [Ghy87 ; Kan88 ; HK90 ; BFL92 ; BL93 ; Fan05] y apportant des réponses positives partielles mais ce *exclusivement pour les flots ou difféomorphismes Anosov*.¹¹ L'apparition de nouvelles méthodes (entre autres d'analyse micro-locale) a récemment suscité un regain d'intérêt pour des questions de rigidité similaires [Mit24 ; Bea25], de nouveau concernant certains flots d'Anosov (les flots géodésiques de variétés localement symétriques à courbure strictement négative). Nous nous concentrerons sur un résultat dû à Ghys.

10. Deux applications $f: M \rightarrow M$ et $g: N \rightarrow N$ sont *conjuguées par* $\varphi: M \rightarrow N$ si $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

11. Cette question est liée à d'autres problèmes de rigidité reliant la géométrie des variétés localement symétriques à courbure strictement négative à la dynamique de leur flot géodésique (voir par exemple l'introduction de [BCG95]).

Théorème 2.4 ([Ghy87]). *Soit (φ^t) un flot Anosov d'une variété fermée de dimension trois dont les distributions stable et instable sont lisses. Alors à revêtement fini près, (φ^t) est :*

- (1) *soit C^∞ -orbitalement équivalent¹² au flot géodésique d'une surface hyperbolique fermée ;*
- (2) *soit C^∞ -conjugué à la suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore.*

La dichotomie mise en avant par cet énoncé est une occasion d'observer les fibrés invariants E^s/u des exemples algébriques 2.1 de dimension trois sous un œil nouveau : celui de la *géométrie* locale de leur somme $E^s \oplus E^u$. Le champ de plans $E^s \oplus E^u$ est *intégrable* dans le cas de la suspension d'un automorphisme hyperbolique de \mathbf{T}^2 , *i.e.* tangent à un *feuilletage*. À l'inverse, $E^s \oplus E^u$ est une *structure de contact* dans le cas du flot géodésique d'une surface hyperbolique ou pour un automorphisme partiellement hyperbolique de nil-variété.

Définition 2.5. Une *structure de contact* sur une variété M de dimension $2n + 1$ est un champ d'hyperplans lisse H qui n'est intégrable sur aucun ouvert non-vide. Plus précisément, H est localement le noyau d'une *1-forme de contact* θ , *i.e.* telle que $\theta \wedge (d\theta)^n$ ne s'annule pas.

On renvoie par exemple à [Gei06] pour plus de détails. La dichotomie du théorème 2.4 repose sur un fait hautement *spécifique aux flots Anosov en dimension trois*, qui est une conséquence d'un théorème dû à Livšic : dans leur cas, $E^s \oplus E^u$ est soit intégrable, soit contact [HK90, Theorem 2.3]. Des résultats de Plante [Pla72] montrant la conjugaison à une suspension dans le premier cas, le résultat de Ghys se ramène *in fine* à montrer la rigidité dans le cas des *flots Anosov de contact*, *i.e.* lorsque $E^s \oplus E^u$ est de contact. Ce dernier résultat a été généralisé en dimension quelconque dans [BFL92].

2.3. Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact. La question de rigidité 2.3 a été laissée de côté après l'avancée majeure fournie par le travail [BFL92] de Benoist-Foulon-Labourie, et ce malgré (au moins) deux axes de recherche complètement ouverts à son sujet. Le premier consiste à étudier cette question sans hypothèse géométrique *a priori* (de type structure de contact) sur la somme $E^s \oplus E^u$ (en dimension strictement supérieure à trois). J'évoque deux travaux en cours à ce sujet dans le programme de recherche joint à ce rapport. Le second axe consiste à étudier la question 2.3 pour les *difféomorphismes partiellement hyperboliques*. Cette question n'a longtemps fait l'objet d'aucuns travaux jusqu'à [CPR20 ; AM24], qui en étudient le cas particulier des difféomorphismes de différentielle constante dans un repère adapté. Le résultat ci-dessous fournit une première réponse positive à cette question en l'absence d'une telle hypothèse de rigidité dynamique *a priori*.

Théorème A ([Mio22b, Theorem A]). *Soit f un difféomorphisme partiellement hyperbolique¹³ d'une variété fermée et connexe de dimension trois dont tous les points sont non-errant¹⁴. Supposons que les fibrés invariants E^s , E^c et E^u de f sont lisses et que $E^s \oplus E^u$ est une structure de contact. Alors modulo revêtements et itérées finis, f est C^∞ -conjugué à l'un des exemples suivants :*

- (1) *le temps un d'un flot d'Anosov de contact algébrique,*
- (2) *ou un automorphisme affine partiellement hyperbolique de nil-variété.*

Notons qu'un flot Anosov de contact préserve toujours la forme de contact θ dite *canonique* de noyau $E^s \oplus E^u$ et telle que $\theta(X) \equiv 1$ (avec X le générateur du flot). Il préserve ainsi également le volume $\theta \wedge d\theta$. À l'inverse, un difféomorphisme partiellement hyperbolique dont la somme $E^s \oplus E^u$ est une structure de contact n'a *a priori* aucune raison de préserver ni une forme de contact, ni un volume. Cette première manifestation de la flexibilité induite par le passage d'un flot Anosov à un difféomorphisme partiellement hyperbolique explique l'apparition de l'hypothèse sur les *points non-errants*¹⁴ dans l'énoncé du théorème A. L'existence d'un volume préservé impose en effet à tous les points d'être non-errants, et cette dernière propriété est donc automatique dans le cas d'un flot Anosov de contact. Une distinction plus géométrique entre le cas d'un flot Anosov et

12. Une orbite-équivalence est un difféomorphisme envoyant les orbites du premier flot sur celles du second (le paramétrage des orbites par le flot n'étant pas forcément préservé).

13. Le résultat reste valide sans supposer la décomposition dominée [Mio22b, Corollary 8.2].

14. Un point $x \in M$ est *non-errant* s'il existe une suite d'entiers $k_n \rightarrow +\infty$ et une suite de points $x_n \in M$ convergeant vers x , tel que $f^{k_n}(x_n)$ converge vers x .

celui d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique sera mise en avant au paragraphe 3.2.a, où la stratégie générale de preuve du théorème A est expliquée.

Si la question 2.3 n'a longtemps fait l'objet d'aucun travail pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques, c'est peut-être en partie dû à l'absence de méthodes adaptées. Celles des travaux précédents sont en effet spécifiques aux dynamiques hyperboliques et inopérantes dans le cas partiellement hyperbolique. Les travaux antérieurs s'appuient sur une *connexion affine invariante* due à Kanai [Kan88] provenant de la forme de contact canonique d'un flot Anosov de contact, et l'absence d'une telle forme de contact invariante *a priori* pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques rend cette méthode inadaptée à leur étude. Le théorème A repose sur l'introduction d'une nouvelle méthode qui utilise la notion de *géométrie de Cartan* présentée au paragraphe 3.1.c. Cette notion généralise celle de connexion affine et permet d'étudier les fibrés invariants (E^s, E^c, E^u) de la dynamique comme une structure géométrique à part entière, évitant ainsi toute perte d'information. Ce nouveau point de vue permet l'étude de la question 2.3 dans de nouvelles directions, décrites dans le programme de recherche joint à ce rapport.

3. RIGIDITÉ DES GÉOMÉTRIES DE CHEMINS ET GÉOMÉTRIES DE CARTAN

Le théorème A repose sur des objets et méthodes géométriques présentés au paragraphe 3.1. Ce résultat provient en effet d'un phénomène de rigidité géométrique dont l'explication informelle est la suivante.

Heuristique 3.1. Le triplet de champs de droites $\mathcal{S} = (E^s, E^c, E^u)$ préservé par le difféomorphisme f est une structure géométrique rigide. L'existence d'un automorphisme f de \mathcal{S} dont la dynamique est « riche » est si exceptionnelle, qu'elle impose à la structure géométrique \mathcal{S} d'être particulièrement symétrique et finalement classifiable.¹⁵

L'heuristique 3.1 est l'avatar d'une conjecture de rigidité générale de d'Ambra-Gromov [GD91] vis-à-vis des structures géométriques à « grand » groupe d'automorphismes. Nous introduisons cette conjecture au paragraphe 3.2 et présentons deux travaux dans sa direction.

3.1. Géométries de chemins, géométries de Cartan et structures drapeaux. Bien que « moins précise » que le triplet (E^s, E^c, E^u) , la paire de champs de droites (E^s, E^u) apparaissant dans le théorème A est suffisamment rigide pour une première approche. Nous nous restreignons donc ici à cette famille de structures que nous définissons maintenant.

Définition 3.2. Une *géométrie de chemins* est une paire $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ de champs de droites lisses et transverses sur une variété de dimension trois, telle que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une structure de contact (voir définition 2.5).

L'étude des géométries de chemins remonte à Élie Cartan dans [Car24]. Elles sont parfois également appelées *structures Lagrangiennes de contact* d'après [Tak94]. On renvoie à [ČS09, §4.2.3 p.408] pour plus de contexte, et à [Mio20, Chapitre 1] pour divers exemples.

La *rigidité* des géométries de chemins tient d'abord à l'existence d'*invariants locaux*. Cela peut surprendre lorsque l'on sait que les structures de contact sont *flexibles*, au sens où elles sont toutes localement équivalentes selon un théorème de Darboux. On peut même montrer que tous les couples (E^α, H) avec E^α un champ de droites lisse contenu dans une structure de contact H de dimension trois, sont localement équivalents. À l'inverse, l'ajout d'un second champ de droites E^β rend la paire $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ *rigide* au sens suivant : il existe des géométries de chemins qui ne sont pas localement équivalentes. Les variétés Riemanniennes (M, g) sont les exemples les plus classiques de structures géométriques qui soient rigides en ce sens. Les invariants locaux sont dans leur cas fournis par la *courbure* de g , qui s'annule précisément si (M, g) est localement isométrique à l'espace homogène modèle des variétés Riemanniennes, qui est l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

Nous introduisons dans cette sous-section la notion de *géométrie de Cartan* [Car10], qui relie les points de vue de Klein (espaces homogènes et (G, X) -structures) et de Riemann (métriques Riemanniennes) sur la géométrie (voir [Sha97]) et fournit des analogues pertinents aux notions d'espace euclidien et de courbure Riemannienne dans le cas des géométries de chemins.

15. La connaissance précise de \mathcal{S} permet en retour la classification dynamique de f . Si l'on connaît assez bien une structure géométrique, on s'attend en effet à connaître tout aussi bien ses automorphismes.

3.1.a. *Espace des drapeaux.* En notant \mathbb{RP}^2 l'espace des droites de \mathbb{R}^3 , et \mathbb{RP}_*^2 l'espace des plans de \mathbb{R}^3 (i.e. des droites projectives de \mathbb{RP}^2), l'espace des drapeaux est l'ensemble

$$\mathbf{X} = \{(p, D) \mid p \in D\} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}_*^2$$

des droites projectives pointées de \mathbb{RP}^2 . Les fibres des deux projections $\pi_\alpha: (p, D) \in \mathbf{X} \rightarrow p \in \mathbb{RP}^2$ et $\pi_\beta: (p, D) \in \mathbf{X} \rightarrow D \in \mathbb{RP}_*^2$ définissent deux feuilletages en cercles \mathcal{C}_α et \mathcal{C}_β sur \mathbf{X} . On peut vérifier que la somme des champs de droites \mathcal{TC}_α et \mathcal{TC}_β tangents à ces derniers est une structure de contact, i.e. que $\mathcal{L}_\mathbf{X} = (\mathcal{TC}_\alpha, \mathcal{TC}_\beta)$ est une géométrie de chemins. L'espace des drapeaux \mathbf{X} admet une action transitive du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ qui induit une identification de \mathbf{X} avec l'espace homogène $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{\min}$, avec $\mathbf{P}_{\min} \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Cette action préserve la géométrie de chemins $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ de \mathbf{X} , dont $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est exactement le groupe d'automorphismes.

3.1.b. *Structures drapeaux.* Une fois l'espace homogène modèle $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_\mathbf{X})$ connu, la première étape de généralisation est de considérer les géométries de chemins (M, \mathcal{L}) localement modelées sur $(\mathbf{X}, \mathcal{L}_\mathbf{X})$, i.e. admettant un atlas de cartes constituées d'isomorphismes locaux de \mathcal{L} sur $\mathcal{L}_\mathbf{X}$. Tout changement de carte d'un tel atlas est un automorphisme local de \mathbf{X} , et on peut montrer que tout automorphisme local de \mathbf{X} est la restriction de l'action d'un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ (voir [Mio20, Théorème 4.1.8]). Réciproquement, un atlas à valeurs dans \mathbf{X} dont les changements de cartes sont dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ définit naturellement une unique géométrie de chemins \mathcal{L} (celle pour laquelle les cartes de l'atlas sont des isomorphismes locaux de \mathcal{L} vers $\mathcal{L}_\mathbf{X}$). Un tel atlas maximal est appelé $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -structure, ce que nous appellerons *structure drapeaux* par la suite. Sur une variété M de dimension trois, la donnée d'une structure drapeaux et celle d'une géométrie de chemins localement isomorphe à \mathbf{X} sont donc équivalentes. Les variétés Riemanniennes à courbure nulle peuvent être décrites de la même manière comme $(\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n), \mathbb{R}^n)$ -structures (voir [Thu97]).

3.1.c. *Géométries de Cartan et courbure.* Tandis qu'une métrique Riemannienne à courbure nulle est localement modelée sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n , une métrique Riemannienne générale est « infinitésimalement modelée » sur \mathbb{R}^n au sens où elle consiste en la donnée d'un espace euclidien variant d'un espace tangent à l'autre. Inspirée du cas Riemannien, la notion de géométrie de Cartan permet de généraliser à tout espace homogène $X = G/P$ ce passage des structures géométriques localement modelées sur X (appelées (G, X) -structures) à celles infinitésimalement modelées sur X qui sont appelées *géométries de Cartan modelées sur X* (voir par exemple [Sha97] ou [Mio20, §3.1]).

Les *géométries de Cartan modelées sur l'espace des drapeaux* $\mathbf{X} \equiv \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})/\mathbf{P}_{\min}$ correspondent exactement à l'ensemble des géométries de chemins (voir par exemple [ČS09] ou [Mio20, Chapitre 4]). Le cadre des géométries de Cartan a l'avantage de définir la notion de *courbure* d'une géométrie de chemins, jouant un rôle analogue à celle de courbure Riemannienne. La courbure d'une géométrie de chemin s'annule en effet précisément lorsqu'elle est localement isomorphe à \mathbf{X} , i.e. correspond à une structure drapeaux. Elle est alors dite *plate*.

3.2. **Programme de d'Ambra-Gromov pour les géométries de chemins.** Mettons maintenant l'heuristique 3.1 à l'épreuve de l'exemple le plus classique de structure géométrique rigide : les variétés Riemanniennes compactes. Ces dernières ont un groupe d'isométrie *compact* selon un théorème de Myers-Steenrod, et le groupe engendré par toute isométrie f est donc relativement compact. Or la non-compactité du groupe engendré par f est le sens minimal que l'on puisse donner au fait que « f a une dynamique riche ». Il nous faut donc considérer une structure géométrique moins rigide pour évaluer la pertinence de l'heuristique 3.1 : la *classe conforme* d'une métrique Riemannienne g .¹⁶ Les sphères rondes \mathbf{S}^n admettent un *groupe de transformations conformes* non-compact. Un théorème de Ferrand-Obata [Oba71 ; Fer96] affirme que ce sont les seules variétés Riemanniennes fermées de la sorte.

D'Ambra et Gromov [GD91] suggèrent de voir le résultat de Ferrand-Obata comme la manifestation d'un phénomène plus général. La *coïncidence de la compacité de la variété et de la non-compactité du groupe d'automorphismes d'une structure géométrique rigide devrait être assez rare pour permettre une classification* (i.e. un résultat du type de celui de Ferrand-Obata). Cette

16. C'est à dire l'ensemble des métriques ρg avec ρ une fonction lisse strictement positive.

idée est proche de conjectures dûes à Zimmer [Zim87] qui furent originellement formulées pour des actions préservant des structures géométriques (avant de se concentrer sur les actions différentiables de réseaux en rang supérieur, menant récemment à des avancées majeures [Can19]). Divers travaux ont utilisé les géométries de Cartan pour étudier ce *programme de d'Ambra-Gromov*, particulièrement concernant les variétés Lorentziennes (conformes) [Zeg99; Fra20; MP22; Dum+25].

3.2.a. *Retour sur le théorème A*. La preuve du théorème A repose sur l'heuristique 3.1 qui est un avatar du programme de d'Ambra-Gromov pour la structure $\mathcal{S} = (E^s, E^u, E^c)$. Cette structure est une géométrie de chemins (E^s, E^u) enrichie par un troisième champ de droites transverse E^c . L'objectif est de montrer que \mathcal{S} est particulièrement symétrique *i.e.* que son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\mathcal{S})$ est grand, à partir de l'existence d'un unique automorphisme $f \in \text{Aut}(\mathcal{S})$ ayant une dynamique particulièrement riche.

Ce point de vue permet de souligner une différence fondamentale entre le cas d'un flot Anosov (φ^t) (traité par le théorème 2.4) et celui d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique f (traité par le théorème A). Dans le premier cas, (φ^t) est un sous-groupe à un paramètre de $\text{Aut}(\mathcal{S})$ qui est donc automatiquement de dimension non-nulle. Dans le second cas, f ne fournit qu'une copie de \mathbb{Z} dans $\text{Aut}(\mathcal{S})$. Ce dernier pourrait donc *a priori* être discret, et l'on veut au contraire montrer que \mathcal{S} admet un groupe d'automorphismes de dimension positive (au revêtement universel).

3.2.b. *Programme de d'Ambra-Gromov pour les géométries de chemins strictes*. Nous verrons au théorème F une famille d'exemples « exotiques » de géométries de chemins à courbure nulle (*i.e.* de structures drapeaux), qui rendent peu probable une réponse générale au programme de d'Ambra-Gromov dans leur cas. Considérons la structure géométrique plus rigide $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ appelée *géométrie de chemins stricte*, définie par une géométrie de chemins (E^α, E^β) associée à une forme de contact lisse θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$.

Tout flot Anosov de contact à fibrés invariants lisses préserve une géométrie de chemins stricte (voir la discussion suivant le théorème A). Avec X_θ le *champ de Reeb* de θ ¹⁷, on notera qu'une géométrie de chemins stricte définit un triplet de champs de droites $\mathcal{S}_\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \mathbb{R}X_\theta)$, semblable à la structure préservée par les difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact considérés au théorème A. Ces derniers ne préservent donc pas une géométrie de chemins stricte, mais seulement une « classe conforme » de géométries de chemins strictes. Le résultat ci-dessous, obtenu en collaboration avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso, complète le programme de d'Ambra-Gromov pour les géométries de chemins strictes.

Théorème B ([FMV21, Theorem 1.1]). *Soit \mathcal{T} une géométrie de chemins stricte sur une variété fermée M de dimension trois, dont le groupe d'automorphismes est non-compact. Alors (M, \mathcal{T}) est isomorphe à l'un des exemples apparaissant dans le théorème A.*¹⁸

Le théorème B explique incidemment le phénomène sous-jacent au théorème 2.4 de Ghys [Ghy87]. Ce dernier constitue en effet un cas très particulier du théorème B, où le groupe d'automorphismes de \mathcal{T} est supposé contenir un flot Anosov.

3.2.c. *Géométries de chemins non-plates à symétries maximales*. Nous nous sommes pour le moment intéressés aux géométries de chemin admettant un groupe d'automorphismes qui est « large » d'un point de vue dynamique, *i.e.* non-compact. On peut également s'intéresser aux géométries de chemin admettant un grand groupe d'automorphismes en termes de dimension. C'est d'un point de vue local que cette question fait sens en considérant l'algèbre de Lie $\mathfrak{fill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L})$ des *champs de Killing* locaux, qui sont les champs de vecteurs définis au voisinage d'un point x et dont le flot préserve la géométrie de chemins \mathcal{L} .

Selon un résultat de Tresse [Tre96], $\dim \mathfrak{fill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L}) \leq 3$ pour les géométries de chemins non-plates. Lorsque \mathcal{L} est localement isomorphe à une géométrie de chemins G -invariante sur un groupe de Lie G , le cas d'égalité $\dim \mathfrak{fill}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L}) = 3$ est réalisé. Nous avons réciproquement montré avec

17. C'est à dire l'unique champ de vecteurs X_θ tel que $\theta(X_\theta) \equiv 1$, et qui engendre le noyau de $d\theta : d\theta(X_\theta, \cdot) \equiv 0$.

18. La version publiée de ce résultat fait l'hypothèse de l'existence d'une orbite dense de ce groupe, mais une révision apportée à la version pré-publiée sur arXiv montre que cette hypothèse est en réalité superflue.

Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso que cette dimension maximale force une géométrie de chemins non-plate à être localement homogène.¹⁹

Théorème C ([FMV24, Corollary 1.2]). *En un point où $\dim \mathfrak{fil}_x^{\text{loc}}(\mathcal{L}) \geq 3$, une géométrie de chemins de dimension trois dont la courbure ne s'annule pas est localement isomorphe à une géométrie de chemin invariante à gauche sur un groupe de Lie de dimension trois.*

4. GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE DES STRUCTURES DRAPEAUX EN DIMENSION TROIS

La notion de géométrie de Cartan permet d'interpréter les géométries de chemins à courbure nulle comme les $(\text{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$ -structures, que nous appellerons désormais *structure drapeaux*. Ce sont les variétés de dimension trois localement modelées sur l'espace des drapeaux complets de \mathbb{R}^3 noté \mathbf{X} , sous l'action du groupe $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ (voir paragraphe 3.1.b). L'étude de ces structures est un préalable nécessaire à celle des géométries de chemins, par exemple dans la perspective du programme de d'Ambra-Gromov. Nous présentons au paragraphe 4.2 un résultat dans cette direction. La compréhension des structures drapeaux est bien moins avancée que celle des représentations à valeurs dans $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ qui leur sont associées. Alors que l'on sait qu'il n'existe aucune *représentation Anosov* d'un groupe fondamental de variété hyperbolique fermée de dimension trois dans $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ [CT20 ; Dey25], la question suivante demeure par exemple complètement ouverte.

Question 4.1. Existe-t-il une structure drapeaux sur une variété hyperbolique fermée de dimension trois ?

La question 4.1 constitue une motivation intéressante car elle demande précisément si une même topologie peut porter à la fois une géométrie de rang un (une métrique hyperbolique), et une géométrie de rang deux (une structure drapeaux). Avant d'être en mesure d'aborder cette question, la première nécessité est de constituer une large source d'exemples de structures drapeaux, ce qui est l'objet des travaux présentés au paragraphe 4.1.

4.1. Structures drapeaux exotiques en dimension trois. Jusqu'à récemment, tous les exemples connus de structures drapeaux fermées étaient *Kleiniens*, i.e. de la forme $\Gamma \backslash \Omega$ avec $\Gamma \subset \text{PGL}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret agissant proprement discontinûment sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}$. On notera que toutes les structures sont Kleiniennes dans le cas plus classique des variétés hyperboliques fermées, dû au fait que toute métrique Riemannienne sur une variété compacte est complète. Les structures non-Kleiniennes peuvent en ce sens être vues comme des exemples *exotiques*, et la question de leur existence est ainsi un bon indicateur de la complexité des structures étudiées. Des exemples pour les structures Riemanniennes conformément plates et pour les structures CR sont par exemple fournis dans [KP86 ; Fal92].

Les *sous-groupes Anosov* de $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$ sont en un sens orthogonaux à cette question, en cela qu'ils sont précisément pensés pour induire des exemples de structures drapeaux Kleiniennes [Bar10 ; GW12]. L'étude des représentations fournit une unique méthode générale pour construire de nouvelles structures à partir d'anciennes : le *principe d'Ehresman-Thurston*, affirmant que tout morphisme assez proche du morphisme d'holonomie²⁰ d'une structure drapeaux sur une variété fermée M , demeure le morphisme d'holonomie d'une structure drapeaux sur M . Les représentations Anosov formant un ouvert de l'espace des représentations, ce principe ne permet donc pas de sortir de la classe d'exemples Kleiniens venant des sous-groupes Anosov. Le résultat ci-dessous obtenu avec Elisha Falbel, fournit une méthode générale de construction de structures drapeaux obtenues en recollant deux structures pré-existantes.

Théorème D ([FM24, Theorem A]). *Soient M et N deux variétés de dimension trois munies de structures drapeaux, et $K_M \subset M$, $K_N \subset N$ deux corps-en-anses de genre deux géométriques²¹. Il existe alors une structure drapeaux sur le recollement de M et N au dessus de K_M et K_N .*

19. Les champs de Killing d'une telle géométrie ne s'annulent donc en aucun point, ce qui pourrait *a priori* arriver.

20. À toute structure drapeaux sur une variété M est associée son *morphisme d'holonomie* $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \text{PGL}_3(\mathbb{R})$. L'image du morphisme d'holonomie d'une structure Kleinienne $\Gamma \backslash \Omega$ est par exemple le sous-groupe $\Gamma \subset \text{PGL}_3(\mathbb{R})$.

21. I.e. isomorphes au voisinage d'un bouquet de cercle $B = \mathcal{C}_\alpha(x) \cup \mathcal{C}_\beta(x)$ de l'espace des drapeaux \mathbf{X} , avec $\mathcal{C}_{\alpha/\beta}$ les feuilletages en cercles de \mathbf{X} définis au paragraphe 3.1.a. Voir [FM24, Theorem A] pour plus de détails.

Dans le cas des structures Riemanniennes conformément plates ou des structures CR, il est possible de recoller deux structures sur la *somme connexe* des variétés qui les portent [Kul78; BS76]. Dans le cas d’une structure drapeaux, la spécificité du rang supérieur apparaît : les points attractifs et répulsifs de la dynamique Nord-Sud sont en effet remplacés par des *bouquets de cercles*, et le recollement est fait le long de voisinages de ces derniers qui sont des *corps-en-anses géométriques de genre deux*. Le théorème D nous permet entre autres de montrer l’existence de nombreuses structures drapeaux non-Kleiniennes.

Théorème E ([FM24, Theorem D]). *Soit M une variété fermée de dimension trois munie d’une structure drapeaux. Si M contient un bouquet de cercles géométriques²¹ et si son groupe d’holonomie contient un élément loxodromique, alors il existe une variété fermée de dimension trois munie d’une structure drapeaux non-Kleinienne dans laquelle $M \setminus B_M$ se plonge.*

4.2. Compactifications géométriques de flots géodésiques. Un second objectif dans la direction du programme de d’Ambra-Gromov (voir paragraphe 3.2), est d’explorer la diversité possible des structures drapeaux admettant un groupe d’automorphismes non-compact, ainsi que les caractéristiques de ces derniers. On peut par exemple remarquer que tous les exemples rencontrés jusqu’ici d’automorphismes de géométries de chemins (E^α, E^β) sont en réalité plus restrictifs : ils préservent également un champ de droites transverse à $E^\alpha \oplus E^\beta$, et même une forme de contact θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$ (voir paragraphe 3.2.b et théorème B). S’il en était de même pour tout automorphisme de géométrie de chemins, cela signifierait qu’il n’y a aucune différence dynamique entre l’étude des géométries de chemins et celle des géométries de chemins strictes. Une obstruction à préserver une forme de contact est par exemple d’être *non-conservatif*, *i.e.* de ne préserver aucune forme volume. On peut également se demander s’il existe des automorphismes de géométries de chemins *essentiels*,²² *i.e.* ne préservant aucun champ de droites transverse à la structure de contact.

Le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$ à toute surface hyperbolique complète Σ admet une géométrie de chemins $\mathcal{L}_\Sigma = (E^s, E^u)$ invariante par le flot géodésique, qui est donnée par les fibrés stable et instable dans le cas compact. Le résultat ci-dessous s’intéresse à des surfaces non-compactes Σ , et fournit des exemples d’automorphismes « exotiques » de géométries de chemins en construisant une compactification géométrique de la structure $(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$.

Théorème F ([Mio22a, Theorem A]). *Soient $g_1, \dots, g_d \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ des éléments hyperboliques de points fixes deux à deux distincts, et $\Sigma = \Gamma_0 \backslash \mathbf{H}^2$ la surface hyperbolique obtenue comme quotient par le groupe de Schottky $\Gamma_0 = \langle g_1, \dots, g_d \rangle$. Alors quitte à remplacer chaque g_i par un itéré $g_i^{r_i}$:*

- (1) *$(T^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$ admet une compactification (M, \mathcal{L}) qui est une structure drapeaux ;*
- (2) *de plus, le flot géodésique de $T^1\Sigma$ s’étend sur M en un flot d’automorphismes de \mathcal{L} non-conservatif, essentiel, et non-relativement compact.*

Le théorème F montre la grande variété des géométries de chemins compactes à groupe d’automorphisme non-compact, ce qui suggère qu’une réponse générale au programme de d’Ambra-Gromov est peu probable pour ces dernières (et ce même dans le cas de la courbure nulle *i.e.* des structures drapeaux).

L’existence de la compactification (M, \mathcal{L}) repose sur celle d’un ouvert Ω_Γ de l’espace des drapeaux, admettant une action propre et cocompacte du groupe d’holonomie $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ de la structure drapeaux \mathcal{L}_Σ . Si l’existence de cet ouvert peut être obtenue par des résultats généraux sur les représentations Anosov [GW12; KLP18], je décris dans [Mio22a] un *domaine fondamental* de l’action de Γ sur Ω_Γ dans le cas d’un *groupe de Schottky*.

5. RIGIDITÉ DES TORES DE-SITTER SINGULIERS VIS-À-VIS DES FEUILLETAGES LUMIÈRES

La dernière direction de mon travail de recherche concerne une famille de structures géométriques sur les surfaces appelées *structures de-Sitter singulières* (présentées à travers des exemples au paragraphe 5.1). Une telle structure définit sur un tore un système dynamique d’origine géométrique, qui est une paire de feuilletages transverses appelés *feuilletages lumières*. Toute isométrie

22. Par analogie avec les *transformations conformes essentielles* d’une structure pseudo-Riemannienne conforme qui ne préservent aucune métrique de la classe conforme (voir [Fra05] au sujet du cas Lorentzien).

induit naturellement une conjugaison de ces feuilletages, et on peut réciproquement se demander si ce système dynamique détermine la géométrie. Les travaux présentés dans cette section sont motivés par cette question. Son intérêt et sa difficulté principale viennent du fait que les feuilletages lumières sont seulement *continus*, ce qui demande de tirer des informations géométriques à partir d'une notion de dynamique topologique. On parle alors de *rigidité géométrique*.

5.1. Tores de-Sitter singuliers. Une forme quadratique du plan \mathbb{R}^2 est dite *Lorentzienne* si elle est non-dégénérée et d'indice 1, *i.e.* linéairement conjuguée à la forme de *Minkowski*

$$(5.1) \quad q_{1,1}(x, y) = x^2 - y^2.$$

Une *métrique Lorentzienne* g sur une surface S est l'analogue d'une métrique Riemannienne en signature Lorentzienne, à savoir un champ lisse de formes quadratiques Lorentziennes sur les plans tangents à S . La spécificité d'une métrique Lorentzienne est de définir sur S deux champs de droites dits *lumières* sur lesquelles g s'annule.²³ Ils s'intègrent en une paire de *feuilletages lumières* transverses de dimension 1 appelée *bi-feuilletage lumière*. L'existence d'un feuilletage imposant à S d'être de caractéristique d'Euler nulle selon le théorème de Poincaré-Hopf, le tore \mathbf{T}^2 est donc la seule surface fermée orientable et connexe supportant une métrique Lorentzienne. Un analogue à la formule de Gauss-Bonnet [Dza84] impose de plus à une telle métrique à courbure constante d'être de courbure nulle. La construction de tores Lorentziens à courbure constante *non-nulle* nécessite pour cette raison l'introduction de *singularités* concentrant toute la courbure, similaires aux singularités coniques Riemanniennes, que nous définissons maintenant.

5.1.a. Espace de-Sitter. L'*espace de-Sitter* est l'ensemble

$$(5.2) \quad \mathbf{dS}^2 = (\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1) \setminus \text{diagonale}, \text{ où diagonale} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{RP}^1\},$$

muni de l'action transitive de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ induite par son action projective diagonale sur $(\mathbb{RP}^1)^2$. Le stabilisateur du point $\mathbf{o} = ([\frac{1}{0}], [\frac{0}{1}]) \in \mathbf{dS}^2$ est le sous-groupe diagonal $A = \{a^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, ce qui identifie \mathbf{dS}^2 à l'espace homogène $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/A$. La métrique Lorentzienne $\mathbf{g}_{\mathbf{dS}^2} = \frac{4}{|x-y|^2} dx dy$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariante et à courbure constante égale à 1, et $(\mathbf{dS}^2, \mathbf{g}_{\mathbf{dS}^2})$ est l'*espace homogène modèle* des surfaces Lorentziennes à courbure constante non-nulle (c'est en ce sens l'analogue Lorentzien du plan hyperbolique \mathbf{H}^2).²⁴ Son bi-feuilletage lumière $(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)$ est induit par le bi-feuilletage produit de $(\mathbb{RP}^1)^2$ en horizontales et verticales.

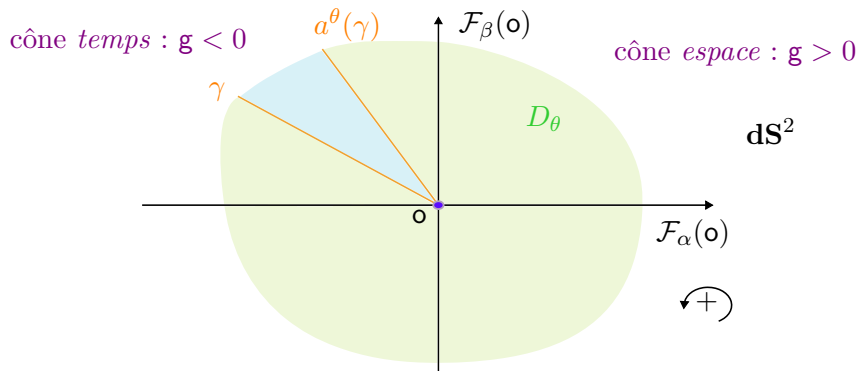


FIGURE 5.1. Singularité de-Sitter d'angle θ .

23. Ce sont par exemple les droites d'équations $x = \pm y$ pour la forme de Minkowski (5.1). Ces champs de droites sont en général définis sur un revêtement d'indice 2 de S , mais seront bien définis sur S dans notre cas.

24. En dimension 2, \mathbf{dS}^2 et son analogue *anti-de-Sitter* de courbure constante -1 sont anti-isométriques. La quadrique $q_{1,2}^{-1}(1)$ de l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^3, q_{1,2})$ est isométrique à \mathbf{dS}^2 , ce qui en fournit un modèle analogue au modèle de l'hyperboloïde de \mathbf{H}^2 .

5.1.b. *Surfaces de-Sitter singulières.* De manière analogue au cas Riemannien, une singularité conique Lorentzienne est construite en choisissant une isométrie $a^\theta \in A$ non-triviale et un rayon géodésique $\gamma \subset \mathbf{dS}^2$ émanant de \mathbf{o} , en considérant le secteur D_θ allant de γ à $a^\theta(\gamma)$ dans \mathbf{dS}^2 et en recollant ses deux composantes de bord par a^θ (voir figure 5.1 ci-dessus). On obtient ainsi une surface $\mathbf{dS}_\theta^2 = D_\theta / \sim$ avec un point marqué \mathbf{o}_θ qui est la projection de \mathbf{o} , munie sur $\mathbf{dS}_\theta^2 \setminus \{\mathbf{o}_\theta\}$ d'une métrique Lorentzienne naturelle provenant de celle de \mathbf{dS}^2 .

Définition 5.1. Une *structure de-Sitter singulière* sur une surface est une métrique Lorentzienne localement isométrique à \mathbf{dS}^2 définie en dehors d'un ensemble discret de points qui sont des *singularités standard de-Sitter*, i.e. admettent un voisinage isométrique à celui de \mathbf{o}_θ dans \mathbf{dS}_θ^2 .²⁵

5.1.c. *Bi-feuillement lumière.* On peut montrer que les feuillements lumières d'une surface de-Sitter singulière S se prolongent aux singularités en une paire de feuillements topologiques transverses appelée *bi-feuillement lumière* de S . Le tore demeure donc la seule surface fermée orientable et connexe supportant une structure de-Sitter singulière. L'étude des métriques Lorentziennes sur les surfaces fermées de genre supérieur exigera la considération de nouveaux types de singularités, ce qui fera l'objet de travaux futurs évoqués dans le programme de recherche joint à ce rapport.

5.1.d. *Exemples : une famille à un paramètre de tores de-Sitter à une singularité.* L'exemple le plus simple de tore de-Sitter singulier est obtenu en considérant un rectangle \mathcal{R}_θ d'aire θ à bords lumières dans \mathbf{dS}^2 , et en recollant ses côtés selon les identifications illustrées à la figure 5.2. On identifie d'abord les côtés verticaux de \mathcal{R}_θ par l'unique isométrie g_θ envoyant côté sur côté, obtenant un cylindre ayant deux feuilles lumières fermées horizontales pour composantes de bord. Le recollement isométrique de ces dernières est un *échange d'intervalle homographique par morceaux* (h_1, h_2) admettant deux degrés de liberté (x, x') . L'existence d'une unique singularité p au quotient impose cependant une relation additionnelle $x' = x'(x)$.

On obtient finalement un unique paramètre x de « twist », et une famille à un paramètre de tores de-Sitter $\mathcal{T}_{\theta,x}$ à une singularité p d'angle θ dont la feuille lumière horizontale est fermée.

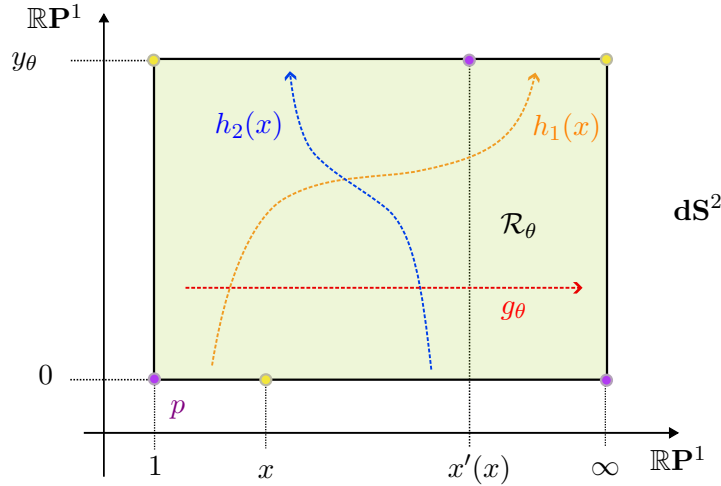


FIGURE 5.2. Tore de-Sitter $\mathcal{T}_{\theta,x}$ à une singularité de feuille lumière horizontale fermée.

5.2. **Uniformisation des tores de-Sitter singuliers.** Les exemples $\mathcal{T}_{\theta,x}$ du paragraphe 5.1.d montrent l'existence d'un *espace de déformation* $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$ des tores de-Sitter à une singularité d'angle θ modulo isotopies (voir [Mio24, Définition 6.1] pour plus de détails). Le paramètre de « twist » x étant toutefois peu intrinsèque, on peut se demander s'il correspond à un phénomène sous-jacent dans l'espoir d'obtenir une description plus globale de $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$. On remarque alors que le point $(x, 0)$ est le *premier retour* $R_\beta(p)$ de la singularité $p = (1, 0) \in \mathcal{T}_{\theta,x}$ sur sa feuille lumière horizontale fermée $\mathcal{F}_\alpha(p)$, le long du feuillement vertical \mathcal{F}_β . En d'autres termes,

²⁵. La même définition fait sens pour le plan de Minkowski $(\mathbb{R}^2, q_{1,1})$, fournissant une notion analogue de singularité en courbure nulle.

\mathcal{F}_β est la *suspension* du *difféomorphisme homographique par morceaux* R_β du cercle $\mathcal{F}_\alpha(p)$, et les dynamiques de R_β et \mathcal{F}_β sont ainsi essentiellement équivalentes et contrôlées par le paramètre x .

Ceci est formalisé par les notions de *nombre de rotation* $\rho(R_\beta) \in \mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de R_β , et de *cycle asymptotique* $A(\mathcal{F}_\beta) \in \mathbb{RP}^1$ de \mathcal{F}_β (qui est une version globale de $\rho(R_\beta)$ ²⁶). Les identifications menant aux tores $\mathcal{T}_{\theta,x}$ peuvent évidemment être symétrisées pour obtenir une seconde famille à un paramètre dont la feuille *verticale* de la singularité est cette fois-ci fermée, ce qui suggère de s'intéresser aux deux feuilletages simultanément et finalement à l'application

$$(5.3) \quad \mathcal{A}: \mathbf{g} \in \text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2) \mapsto (A(\mathcal{F}_\alpha^\mathbf{g}), A(\mathcal{F}_\beta^\mathbf{g})) \in (\mathbb{RP}^1)^2 \setminus \text{diagonale}.$$

Dans le cas Riemannien, Troyanov [Tro86 ; Tro91] identifiait l'espace de déformation des métriques à singularités coniques à l'espace de Teichmüller de la surface topologique sous-jacente, à travers la structure complexe. Les observations faites précédemment soutiennent l'idée que l'invariant pertinent n'est plus analytique dans le cas Lorentzien, mais fourni par la *dynamique topologique* du bi-feuilletage lumière à travers l'application \mathcal{A} . De là découle la question : *l'application \mathcal{A} est-elle injective, ou surjective ?* Le nombre de rotation des homéomorphismes du cercle étant stationnaire aux rationnels, on peut montrer que \mathcal{A} n'est *pas injective*. Le travail [Mio24] montre en revanche sa surjectivité, et son injectivité sur certains sous-espaces. J'y obtiens en particulier le résultat suivant.

Théorème G ([Mio24, Theorem B]). *Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, et $A_\alpha \neq A_\beta \in (\mathbb{RP}^1)^2$ deux droites distinctes à pentes irrationnelles. Il existe alors dans $\text{Def}_\theta(\mathbf{T}^2)$ un unique point \mathbf{g} dont les feuilletages lumières aient pour cycles asymptotiques $A(\mathcal{F}_\alpha^\mathbf{g}) = A_\alpha$ et $A(\mathcal{F}_\beta^\mathbf{g}) = A_\beta$. En particulier, $\mathcal{F}_\alpha^\mathbf{g}$ et $\mathcal{F}_\beta^\mathbf{g}$ sont des suspensions minimales (i.e. dont toutes les feuilles sont denses).*

Le théorème G fournit une paramétrisation de la partie la plus dynamiquement riche de l'espace de déformation par un invariant de dynamique topologique. Cette identification est naturellement équivariante pour l'action du groupe modulaire du tore, ce qui ouvre la porte à une étude de la dynamique de ce dernier agissant sur les *variétés des caractères* $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ relatives associées. Ceci fait l'objet d'un projet de recherche décrit dans le texte joint à ce rapport.

5.3. Rigidité géométrique des feuilletages lumière. En observant que deux métriques Lorentziennes conformes g_1 et $g_2 = \rho g_1$ partagent les même droites lumières, on remarque qu'une classe conforme Lorentzienne est équivalente à son bi-feuilletage lumière. Ceci permet de réinterpréter le théorème G comme un résultat d'*uniformisation*. À la différence du cas Riemannien, on notera cependant que c'est ici dans chaque « classe conforme topologique » que l'on identifie une unique métrique singulière à courbure constante. Ceci suggère une rigidité bien plus forte du cas Lorentzien, dont une nouvelle manifestation est le résultat suivant.

Théorème H ([Mio24, Theorem A]). *Soit S_1 et S_2 deux tores de-Sitter ayant une unique singularité du même angle et des bi-feuilletages lumières minimaux. Alors toute équivalence topologique entre les bi-feuilletages lumières de S_1 et S_2 est une isométrie.*

Une *équivalence topologique* est un homéomorphisme $f: S_1 \rightarrow S_2$ envoyant le bi-feuilletage lumière de S_1 sur celui de S_2 . Le théorème H montre donc incidemment que *toute équivalence topologique entre deux bi-feuilletages lumières de la sorte est lisse*. On parle de *rigidité géométrique* lorsqu'une classe de systèmes dynamiques satisfait un tel résultat de « régularité automatique des conjugaisons topologiques ». L'une des motivations de ce travail est d'utiliser ce résultat pour étudier le même problème de rigidité géométrique pour les *difféomorphismes par morceaux du cercle*. Ce projet de recherche est présenté dans le programme joint à ce rapport.

INDEX DES RÉSULTATS PRÉSENTÉS

Théorème A [Mio22b], 7
 Théorème B [FMV21], 10
 Théorème C [FMV24], 10
 Théorème D [FM24], 11

Théorème E [FM24], 11
 Théorème F [Mio22a], 12
 Théorème G [Mio24], 15
 Théorème H [Mio24], 14

26. L'analogue des cycles asymptotiques pour les surfaces de genre supérieur sont les classes d'isotopie des feuilletages projectifs mesurés.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE DES PUBLICATIONS PRÉSENTÉES

Rigidité des dynamiques hyperboliques et des géométries de chemins (§2 et §3).

- [FMV21] E FALBEL, M MION-MOUTON et JM VELOSO. Cartan connections and path structures with large automorphism groups. *International Journal of Mathematics* (2021). DOI : [10.1142/S0129167X21400164](https://doi.org/10.1142/S0129167X21400164).
- [FMV24] E FALBEL, M MION-MOUTON et JM VELOSO. Reductions of path structures and classification of homogeneous structures in dimension three. À paraître dans *Transformation groups* (172024). DOI : [10.1007/s00031-025-09937-9](https://doi.org/10.1007/s00031-025-09937-9).
- [Mio22b] M MION-MOUTON. Partially hyperbolic diffeomorphisms and Lagrangian contact structures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 42.8 (2022), p. 2583-2629. DOI : [10.1017/etds.2021.54](https://doi.org/10.1017/etds.2021.54).

Géométrie et topologie des structures drapeaux en dimension trois (§4).

- [FM24] E FALBEL et M MION-MOUTON. Geometric surgeries of three-dimensional flag structures and non-uniformizable examples. À paraître dans *Transactions of the American Mathematical Society* (42024). DOI : [10.1090/tran/9532](https://doi.org/10.1090/tran/9532).
- [Mio22a] M MION-MOUTON. Geometrical compactifications of geodesic flows and path structures. *Geometriae Dedicata* 217.2 (2022), p. 18. DOI : [10.1007/s10711-022-00751-1](https://doi.org/10.1007/s10711-022-00751-1).

Rigidité des tores de-Sitter singuliers vis-à-vis des feuilletages lumières (§5).

- [Mio24] M MION-MOUTON. Rigidity of singular de-Sitter tori with respect to their lightlike bi-foliation. Révision soumise aux *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (2024). DOI : [10.48550/ARXIV.2410.03260](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2410.03260).

BIBLIOGRAPHIE

- [AM24] S ALLOUT et K MOGHADDAMFAR. On partially hyperbolic diffeomorphisms in dimension three via a notion of autonomous dynamics. *Bulletin de la Société mathématique de France* (2024). DOI : [10.24033/bsmf.2879](https://doi.org/10.24033/bsmf.2879).
- [Ano69] DV ANOSOV. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967). American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [Arn64] VI ARNOL'D. Small denominators. I : Mapping the circle onto itself. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* 25 (1964), p. 21-86.
- [Bar10] T BARBOT. Three-dimensional Anosov flag manifolds. *Geometry & Topology* 14.1 (2010), p. 153-191. DOI : [10.2140/gt.2010.14.153](https://doi.org/10.2140/gt.2010.14.153).
- [BBS11] T BARBOT, F BONSANTE et JM SCHLENKER. Collisions of particles in locally AdS spacetimes. I. Local description and global examples. *Communications in Mathematical Physics* 308.1 (2011), p. 147-200. DOI : [10.1007/s00220-011-1318-6](https://doi.org/10.1007/s00220-011-1318-6).
- [BCG95] G BESSON, G COURTOIS et S GALLOT. Entropy and rigidity of locally symmetric spaces of strictly negative curvature. *Geometric and Functional Analysis. GAFA* 5.5 (1995), p. 731-799. DOI : [10.1007/BF01897050](https://doi.org/10.1007/BF01897050).
- [BDP03] C BONATTI, LJ DÍAZ et ER PUJALS. A \mathcal{C}^1 -generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks of sources. *Annals of Mathematics. Second Series* 158.2 (2003), p. 355-418. DOI : [10.4007/annals.2003.158.355](https://doi.org/10.4007/annals.2003.158.355).
- [Bea25] LB BEAUFORT. *On Kanai's conjecture for frame flows over negatively curved manifolds*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2509.09500](https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.09500).
- [BFL92] Y BENOIST, P FOULON et F LABOURIE. Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. *Journal of the American Mathematical Society* 5.1 (1992), p. 33-74.
- [BGT25] A BOULANGER, S GHAZOUANI et G TAHAR. Closed geodesics in dilation surfaces. *Geometry & Topology* 29.4 (2025), p. 2217-2250. DOI : [10.2140/gt.2025.29.2217](https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.2217).
- [BL93] Y BENOIST et F LABOURIE. About affine Anosov diffeomorphisms with differentiable stable and instable foliations. *Inventiones Mathematicae* 111.2 (1993), p. 285-308. DOI : [10.1007/BF01231289](https://doi.org/10.1007/BF01231289).

- [BS76] Dj BURNS et S SHNIDER. Spherical hypersurfaces in complex manifolds. *Inventiones Mathematicae* 33 (1976), p. 223-246. DOI : [10.1007/BF01404204](https://doi.org/10.1007/BF01404204).
- [Can19] S CANTAT. Recent progress concerning Zimmer program [after A. Brown, D. Fisher, and S. Hurtado]. In : *Séminaire Bourbaki. Volume 2017/2018. Exposés 1136–1150*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2019, 1-48, ex.
- [Car10] É CARTAN. Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 27 (1910), p. 109-192.
- [Car24] É CARTAN. Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52 (1924), p. 205-241. DOI : [10.24033/bsmf.1053](https://doi.org/10.24033/bsmf.1053).
- [CPR20] PD CARRASCO, E PUJALS et F RODRIGUEZ-HERTZ. Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms under some rigid conditions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2020), p. 1-12. DOI : [10.1017/etds.2020.85](https://doi.org/10.1017/etds.2020.85).
- [ČS09] A ČAP et J SLOVÁK. *Parabolic geometries I Background and general theory*. T. 154. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, p. x+628. DOI : [10.1090/surv/154](https://doi.org/10.1090/surv/154).
- [CT20] R CANARY et K TSOUVALAS. Topological restrictions on Anosov representations. *Journal of Topology* 13.4 (2020), p. 1497-1520. DOI : [10.1112/topo.12166](https://doi.org/10.1112/topo.12166).
- [Den32] A DENJOY. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série* 11 (1932), p. 333-375.
- [Dey25] S DEY. On Borel Anosov subgroups of $SL(d, \mathbb{R})$. *Geometry & Topology* 29.1 (2025), p. 171-192. DOI : [10.2140/gt.2025.29.171](https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.171).
- [DFG19] E DURYEV, C FOUGERON et S GHAZOUANI. Dilation surfaces and their Veech groups. *Journal of Modern Dynamics* 14.0 (2019), p. 121-151. DOI : [10.3934/jmd.2019005](https://doi.org/10.3934/jmd.2019005).
- [DPU99] LJ DÍAZ, ER PUJALS et R URES. Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Mathematica* 183.1 (1999), p. 1-43. DOI : [10.1007/BF02392945](https://doi.org/10.1007/BF02392945).
- [Dum+25] S DUMITRESCU, C FRANCES, K MELNICK, V PECASTAING et A ZEGHIB. *A local Lorentzian Ferrand-Obata theorem for conformal vector fields*. 2025. DOI : [10.48550/arXiv.2511.03713](https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.03713).
- [Dza84] JJ DZAN. Gauss-Bonnet formula for general Lorentzian surfaces. *Geometriae Dedicata* 15 (1984), p. 215-231. DOI : [10.1007/BF00147645](https://doi.org/10.1007/BF00147645).
- [Fal92] E FALBEL. Non-embeddable CR-manifolds and surface singularities. *Inventiones Mathematicae* 108.1 (1992), p. 49-65. DOI : [10.1007/BF02100599](https://doi.org/10.1007/BF02100599).
- [Fan05] Y FANG. Geometric Anosov flows of dimension five with smooth distributions. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 4.3 (2005), p. 333-362. DOI : [10.1017/S1474748005000083](https://doi.org/10.1017/S1474748005000083).
- [Fer96] J FERRAND. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Mathematische Annalen* 304.2 (1996), p. 277-291. DOI : [10.1007/BF01446294](https://doi.org/10.1007/BF01446294).
- [Fra04] C FRANCES. Lorentzian Kleinian groups. *Commentarii Mathematici Helvetici* 80 (2004). DOI : [10.4171/CMH/38](https://doi.org/10.4171/CMH/38).
- [Fra05] C FRANCES. Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel. *Mathematische Annalen* 332.1 (2005), p. 103-119. DOI : [10.1007/s00208-004-0619-x](https://doi.org/10.1007/s00208-004-0619-x).
- [Fra20] C FRANCES. Lorentz dynamics on closed 3-manifolds. *Annales Henri Lebesgue* 3 (2020), p. 407-471. DOI : [10.5802/ahl.37](https://doi.org/10.5802/ahl.37).
- [GD91] M GROMOV et G D'AMBRA. Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in differential geometry* (1991).
- [Gei06] H GEIGES. Chapter 5 Contact geometry. In : *Handbook of Differential Geometry*. T. 2. North-Holland, 2006, p. 315-382. DOI : [10.1016/S1874-5741\(06\)80008-7](https://doi.org/10.1016/S1874-5741(06)80008-7).
- [Gha21] S GHAZOUANI. Local rigidity for periodic generalised interval exchange transformations. *Inventiones Mathematicae* 226.2 (2021), p. 467-520. DOI : [10.1007/s00222-021-01051-3](https://doi.org/10.1007/s00222-021-01051-3).
- [Ghy87] É GHYS. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 20.2 (1987), p. 251-270.

- [Gué+17] F GUÉRITAUD, O GUICHARD, F KASSEL et A WIENHARD. Anosov representations and proper actions. *Geometry & Topology* 21.1 (2017), p. 485-584. DOI : [10.2140/gt.2017.21.485](https://doi.org/10.2140/gt.2017.21.485).
- [GW08] O GUICHARD et A WIENHARD. Convex foliated projective structures and the Hitchin component for $PSL_4(R)$. *Duke Mathematical Journal* 144.3 (2008), p. 381-445. DOI : [10.1215/00127094-2008-040](https://doi.org/10.1215/00127094-2008-040).
- [GW12] O GUICHARD et A WIENHARD. Anosov representations : domains of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae* 190.2 (2012), p. 357-438. DOI : [10.1007/s00222-012-0382-7](https://doi.org/10.1007/s00222-012-0382-7).
- [Her79] MR HERMAN. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. (On smooth conjugacy of diffeomorphisms of the circle with rotations). *Publications Mathématiques* 49 (1979), p. 5-233. DOI : [10.1007/BF02684798](https://doi.org/10.1007/BF02684798).
- [HK90] S HURDER et A KATOK. Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows. *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 72 (1990), p. 5-61.
- [Kan88] M KANAI. Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 8.02 (1988). DOI : [10.1017/S0143385700004430](https://doi.org/10.1017/S0143385700004430).
- [KKM17] K KHANIN, S KOCIĆ et E MAZZEO. C^1 -rigidity of circle maps with breaks for almost all rotation numbers. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 50.5 (2017), p. 1163-1203. DOI : [10.24033/asens.2642](https://doi.org/10.24033/asens.2642).
- [KLP18] M KAPOVICH, B LEEB et J PORTI. Dynamics on flag manifolds : domains of proper discontinuity and cocompactness. *Geometry & Topology* 22.1 (2018), p. 157-234. DOI : [10.2140/gt.2018.22.157](https://doi.org/10.2140/gt.2018.22.157).
- [KP86] RS KULKARNI et U PINKALL. Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry. In : 1986.
- [Kul78] RS KULKARNI. On the principle of uniformization. *Journal of Differential Geometry* 13 (1978), p. 109-138. DOI : [10.4310/jdg/1214434351](https://doi.org/10.4310/jdg/1214434351).
- [Lab06] F LABOURIE. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones Mathematicae* 165.1 (2006), p. 51-114. DOI : [10.1007/s00222-005-0487-3](https://doi.org/10.1007/s00222-005-0487-3).
- [LM24] R LEE et K MELNICK. *Classification of closed conformally flat Lorentzian manifolds with unipotent holonomy*. 2024. DOI : [10.48550/arXiv.2405.08410](https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.08410).
- [Mio20] M MION-MOUTON. Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact. Thèse. Université de Strasbourg, 2020.
- [Mit24] D MITSUTANI. *Symmetries of geodesic flows on covers and rigidity*. 2024. DOI : [10.48550/arXiv.2402.09576](https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.09576).
- [MP22] K MELNICK et V PECASTAING. The conformal group of a compact simply connected Lorentzian manifold. *Journal of the American Mathematical Society* 35.1 (2022), p. 81-122. DOI : [10.1090/jams/976](https://doi.org/10.1090/jams/976).
- [NR25] A NOLTE et JM RIESTENBERG. Concave foliated flag structures and the $SL_3(R)$ Hitchin component. *Advances in Mathematics* 480 (2025), p. 110504. DOI : [10.1016/j.aim.2025.110504](https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110504).
- [Oba71] M OBATA. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry* 6.2 (1971), p. 247-258. DOI : [10.4310/jdg/1214430407](https://doi.org/10.4310/jdg/1214430407).
- [Pla72] JF PLANTE. Anosov flows. *American Journal of Mathematics* 94 (1972), p. 729-754. DOI : [10.2307/2373755](https://doi.org/10.2307/2373755).
- [Pot18] R POTRIE. Robust dynamics, invariant structures and topological classification. In : *Proceedings of the international congress of mathematicians 2018, ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018. Volume III. Invited lectures*. Hackensack, NJ : World Scientific ; Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2018, p. 2063-2085. DOI : [10.1142/9789813272880_0130](https://doi.org/10.1142/9789813272880_0130).
- [Pot25] R POTRIE. Anosov flows in dimension 3 : an outside look. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 27.1 (2025), p. 21. DOI : [10.1007/s11784-025-01175-6](https://doi.org/10.1007/s11784-025-01175-6).
- [Sha97] R SHARPE. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*. Foreword by S. S. Chern. Berlin : Springer, 1997, p. xix + 421.

- [Tak94] M TAKEUCHI. Lagrangean contact structures on projective cotangent bundles. *Osaka J. Math* 31 (1994), p. 837-860.
- [Thu97] WP THURSTON. *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1 : Volume 1*. Sous la dir. de S LEVY. Princeton University Press, 1997.
- [Tre96] A TRESSE. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x,y,y')$* . Leipzig : S. Hirzel, 1896.
- [Tro86] M TROYANOV. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. (Euclidean surfaces with cone singularities). *L'Enseignement Mathématique. 2e Série* 32 (1986), p. 79-94.
- [Tro91] M TROYANOV. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Transactions of the American Mathematical Society* 324.2 (1991), p. 793-821. DOI : [10.2307/2001742](https://doi.org/10.2307/2001742).
- [Yoc10] JC YOCOZ. Interval exchange maps and translation surfaces. In : *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic. Proceedings of the Clay Mathematics Institute summer school, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy, June 11–July 6, 2007*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS); Cambridge, MA : Clay Mathematics Institute, 2010, p. 1-69.
- [Yoc84] JC YOCOZ. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 17.3 (1984), p. 333-359. DOI : [10.24033/asens.1475](https://doi.org/10.24033/asens.1475).
- [Zeg99] A ZEGHIB. Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. I : Foundations of Lorentz dynamics. *Geometric and Functional Analysis. GAFA* 9.4 (1999), p. 775-822.
- [Zim87] RJ ZIMMER. Lattices in Semisimple Groups and Invariant Geometric Structures on Compact Manifolds. In : *Discrete Groups in Geometry and Analysis : Papers in Honor of G.D. Mostow on His Sixtieth Birthday*. Sous la dir. de R HOWE. Boston, MA : Birkhäuser, 1987, p. 152-210. DOI : [10.1007/978-1-4899-6664-3_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6664-3_6).
- [Zor06] A ZORICH. Flat surfaces. In : *Frontiers in number theory, physics, and geometry I. On random matrices, zeta functions, and dynamical systems. Papers from the meeting, Les Houches, France, March 9–21, 2003*. 2nd printing. Berlin : Springer, 2006, p. 437-583.

MARTIN MION-MOUTON, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE (I2M)

Adresse e-mail : martin.mion-mouton@univ-amu.fr

Page web : <https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/martin.mion-mouton/index.html>