Département GEII

Année 2015/2016
31 Mai 2016

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{\text{o}}$4 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *7 points*
Donner, en justifiant, la nature des intégrales suivantes (on ne les calculera pas en cas de convergence).

1 °) a) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ avec $f(t) = \dfrac{t}{(t+1)\sqrt{t^2+1}}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} f^2(t)\,dt$ avec $f(t) = \dfrac{t}{(t+1)\sqrt{t^2+1}}$.

2 °) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{t^7+1}{e^t+1}\,dt$

3 °) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \sin(x)\,dx$

4 °) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(e^{-t})\,dt$

Exercice 2 : *5 points + 2 bonus*
On s'intéresse dans cet exercice au système linéaire (S) (initialement au repos) qui à toute entrée causale continue par morceaux $x(t)$ fait correspondre la sortie $y(t)$ solution de l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = x(t),$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

1 °) Donner $H(p)$, la fonction de transfert de (S).
2 °) Exprimer la réponse impulsionnelle.
3 °) Comment se comporte la réponse impulsionnelle quand t tend vers $+\infty$? Que peut-on en conclure sur la stabilité du système (S) ?
4 °) Justifier d'une autre manière le résultat sur la stabilité précédemment obtenu.
5 °) *2 points bonus*
On décide de changer :
- soit le signe de y', donc le -2 est remplacé par $+2$.
- soit le signe de y, donc le 5 est remplacé par -5.
Lequel de ces deux changements de signe conduit à un système stable ? Dans ce cas, donner la réponse impulsionnelle.

Exercice 3 : *8 points*
La caractéristique de transfert d'un amplificateur de puissance réel est modélisée par la relation

$$y(t) = 10x(t) + \frac{1}{2}x^2(t),$$

où $x(t)$ est la tension d'entrée qui doit être amplifiée, et $y(t)$ la tension de sortie obtenue.
Ce système est dit non linéaire, à cause du terme $\frac{1}{2}x^2(t)$. Cela se traduit par le fait que la sortie correspondant à une sinusoïde parfaite n'est pas une sinusoïde : c'est le phénomène de distorsion que l'on va étudier dans cet exercice.
Soit $x(t) = M\cos(t)$ une entrée purement sinusoïdale, avec $M > 0$, exprimée en Volts.

1 °) Exprimer $y(t)$ sous la forme d'une série de Fourier finie :

$$y(t) = A_0 + A_1\cos(t) + A_2\cos(2t),$$

et vérifier que $A_0 = \frac{1}{4}M^2$, $A_1 = 10M$ et $A_2 = \frac{1}{4}M^2$.

2 °) Exprimer la valeur moyenne de $y(t)$ et la puissance moyenne P_m de $y(t)$ en fonction du paramètre M.

3 °) On mesure la distorsion de $y(t)$ par le "taux de distorsion approché" :

$$\tau_d = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}A_2^2}{P_m}}$$

(on rappelle que P_m est la puissance moyenne de $y(t)$).

4 °) **a)** Quelle est la signification physique de $\frac{1}{2}A_2^2$?

b) Montrer que $\tau_d = \dfrac{M}{\sqrt{3M^2 + 1600}}$.

c) On considère que (S) agit de façon quasi linéaire si $\tau_d < \dfrac{1}{20}$ (faible distorsion). Pour quelles valeurs de M peut-on considérer que (S) agit de façon quasi linéaire (arrondir à 0.1 Volt près) ?