

MATHÉMATIQUES - 1A - Devoir surveillé n°2 (1H30')

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 8 points

Soit la fraction rationnelle :

$$F_a(X) = \frac{3(X^3 + aX + 1)}{(X-1)^2(X^2 + X + 1)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1 °) Dans cette question on suppose que $a = -2$.

a) Prouver que

$$F_{-2}(X) = \frac{3(X^2 + X - 1)}{(X-1)(X^2 + X + 1)}.$$

b) Ecrire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $F_{-2}(X)$.

2 °) Dorénavant $a \neq -2$ et on admet que $F_a(X)$ est irréductible. On considère sa décomposition formelle :

$$F_a(X) = \frac{A}{(X-1)} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{CX + D}{(X^2 + X + 1)}.$$

De plus, on admet que $C = 2$.

a) Montrer que $B = a + 2$.

b) En déduire la valeur de A et celle de D .

Exercice 2 : 7 points

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $z = \frac{1 + 2ja}{a + j}$.

1 °)

a) Rappeler la relation entre $\arg z$ et $\arg(1 + 2ja)$ et $\arg(a + j)$.

b) Exprimer $\arg(1 + 2ja)$ et de $\arg(a + j)$ à l'aide de la fonction $\arctan$.

2 °) Montrer que $\arg(z) = f(a)$ avec la fonction f qui est définie par

$$\begin{cases} f(a) = \arctan(2a) - \pi - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) & \text{si } a < 0, \\ f(a) = -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0, \\ f(a) = \arctan(2a) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

3 °) Calculer $\lim_{a \rightarrow 0, a < 0} \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$ et $\lim_{a \rightarrow 0, a > 0} \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$ et en déduire que f est continue en 0.

- 4 °) Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a)$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a)$.
 5 °) Calculer $f'(a)$ pour $a < 0$ et pour $a > 0$. En déduire le sens de variation de f .
 6 °) Résoudre l'équation $f(a) = 0$.

Exercice 3 : 7 points

1 °) Ecrire sous forme exponentielle les fonctions $f(x) = (\sqrt{x})^x$ et $g(x) = x^{\sqrt{x}}$. Donner leur domaine de définition.

2 °) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x)$

3 °) Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$.

4 °)

a) Montrer que $g'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}$.

b) Montrer que g admet un minimum que l'on déterminera.

← ~~~~~→