Département GEII

Année 2016/2017
6 Juin 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{\text{o}}$4 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *4 points*

1 °) Donner, en justifiant, la nature de l'intégrale suivante (on ne la calculera pas en cas de convergence) :

$$I = \int_4^{\infty} f(t)\,dt \text{ avec } f(t) = \frac{2t^3 - 4t + 1}{5t^4 - 2t^3 + t + 1}.$$

2 °) **a)** Expliquer pourquoi : $t < e^t$ en $+\infty$

b) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}\,dt$

c) Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+t+1}{t+3}e^{-2t}\,dt$

Exercice 2 : *7 points*

On s'intéresse au système linéaire (S_a) avec a réel. Sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{p-1}{p^2 + (a-1)p - a}.$$

1 °) **a)** Montrer que H(p) possède un unique pôle réel simple.

b) Donner la stabilité du système en fonction des valeurs de a.

2 °) Calculer la réponse impulsionnelle $y_{a,imp}$. Retouver alors différemment la réponse au 1$^{\text{o}}$).

3 °) On considère la formulation du système (S_a) sous forme de produit de convolution :

$$y_a(t) = h_a(t) \star x(t).$$

Comment appelle-t-on les fonctions : $y_a(t)$, $h_a(t)$ et $x(t)$?

4 °) Calculer la réponse indicielle $y_{1,ind}$ du système (S_1) c'est à dire pour $a = 1$.

5 °) Quelle relation lie $h_1(t)$ et $y_{1,ind}(t)$?

Exercice 3 : *9 points + 2 bonus*

On considère le polynôme trigonométrique $x(t) = 1 + \cos(\frac{\pi}{3}t) + \frac{1}{2}\sin(\pi t)$.

1 °) Calculer la période T et la pulsation ω de $x(t)$.

2 °) Donner les coefficients non nuls du développement en série de Fourier de $x(t)$.

3 °) Calculer la valeur moyenne de $x(t)$ et prouver que sa puissance moyenne vérifie :$< x^2 >= \dfrac{13}{8}$.

4 °) On considère le signal $y(t) = \cos(2\pi t) \times x(t)$ de période 6.

a) Prouver que :

$$DSF(y(t)) = -\frac{1}{4}\sin(\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + \cos(2\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{3}t\right) + \frac{1}{4}\sin(3\pi t).$$

b) Représenter le spectre d'amplitude de $y(t)$.

c) Calculer la puissance moyenne $< y^2 >$ de $y(t)$.

[d) & e) Bonus +2 points]

d) Quelle harmonique a la plus grande puissance moyenne et donner la valeur de cette puissance moyenne ?

e) Quel pourcentage de la puissance moyenne totale de $y(t)$ représente-t-elle ?