

MATHÉMATIQUES - 1A - Devoir surveillé n°2 (1H30')

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : 4 points

Soit la fraction rationnelle :

$$F_a(X) = \frac{3X^2 + aX + 18}{(X-2)(X^2+16)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- 1 °) Montrer que la décomposition en éléments simples de $F_a(X)$ a une partie entière nulle.
- 2 °) Dorénavant $a = -5$, écrire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $F_{-5}(X)$.

Exercice 2 : 7 points

Soit $P(X) = (X-1)^4(X-2)^5$ et la fraction rationnelle $F(X) = \frac{P'(X)}{P(X)}$.

- 1 °) a) Montrer que $P'(X) = (X-1)^3(X-2)^4(9X-13)$.
b) En déduire la forme irréductible de $F(X)$ puis écrire sa décomposition en éléments simples.
- 2 °) Soit $f(t) = \ln(|P(t)|)$
a) Donner le domaine de définition de $f(t)$.
b) Calculer $f'(t)$ de deux façons différentes et retrouver la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

Exercice 3 : 4 points

On pose $Z(x) = \frac{1+j\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1+jx}$ pour $x \in]1, +\infty[$. On veut calculer $\arg Z(x)$.

- 1 °) Prouver que $\arg Z(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$ à 2π près.
- 2 °) Prouver que $(\arg Z(x))' = 0$.
- 3 °) En déduire la valeur de $\arg Z(x)$.

Exercice 4 : 5 points

- 1 °) Ecrire sous forme exponentielle la fonction $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$.
- 2 °) Donner son domaine de définition.
- 3 °) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 4 °) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

5 °) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

