Département GEII
IUT MARSEILLE
08 Janvier 2019

Test mathématiques n°2 (MA 1)

Durée : 1h 30

Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.
Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.
Calculatrice, feuille A4 manuscrite autorisées.

Le sujet comporte deux pages

* * * * *

Exercice 1

On considère la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{X^3+aX+1}{(X-1)^2(X+1)}$ avec $a\in\mathbb{R}$. .

1) Pour quelles valeurs du paramètre a l'écriture donnée est-elle irréductible ?

On suppose dorénavant que a est tel que l'écriture donnée de $F(X)$ est irréductible.

2) Sa décomposition en éléments simples comporte-t-elle une partie entière non nulle **(si oui, on ne la calculera pas**) ? Justifier votre réponse.
3) Écrire la décomposition en éléments simples **formelle** (c'est à dire sans calculer la valeur des coefficients) de $F(X)$.

Exercice 2

On considère la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{3X^4+4X^2+3X+3}{X^3(X^2+X+1)}$. On admet que cette écriture est irréductible et que sa décomposition en éléments simples est de la forme $F(X)=\dfrac{1}{X}+\dfrac{A}{X^3}+\dfrac{BX+C}{X^2+X+1}$. Calculer la valeur de A, B et C .

Exercice 3

Résoudre l'équation $2^{x+1}=3^x$. Donner la valeur exacte de la ou des solution(s).

Exercice 4

On considère l'inéquation $\ln(2e^x-1)\leq 2$.

1) Pour quelles valeurs de x la quantité $\ln(2e^x-1)$ est-elle bien définie ?
2) Résoudre l'inéquation $\ln(2e^x-1)\leq 2$.

Exercice 5

1) Rappeler la formule donnant la dérivée de la fonction $\arctan$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}$. En déduire l'équivalence en 0 : $\arctan(x)\sim x$.

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ on considère le nombre complexe $z_n=\left(1+j\dfrac{\pi}{n}\right)^n$.

2) a) Calculer une expression de $\operatorname{Arg}(z_n)$.
   b) Déduire de la question 1) que $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{Arg}(z_n)=\pi$.
3) a) Calculer une expression de $|z_n|$.
   b) Donner en équivalent simple de $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand $n\to+\infty$.
   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=1$.
4) Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n$.

* * * * * * *