Département GEII[1]

Année 2018/2019
5 Juin 2019

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{\text{o}}$4 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable ni montre connectée.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *6 points*

1 °) Donner en justifiant vos réponses la nature des intégrales suivantes (on ne les calculera pas) :

a) $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) dx.$

b) $I_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2+\cos x}{3x^3}\, dx.$

c) $I_3 = \displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{(2x+1)\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x^3+2}}\, dx.$

2 °) Calculer I_4 après avoir prouvé qu'elle converge : $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+1} dt.$

Exercice 2 : *5 points*

Soient $x(t)$ et $y(t)$ l'entrée et la réponse d'un système(S) modélisé par l'équation

$$y"(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

1 °) Calculer la fonction de transfert du système. Préciser la stabilité du système.

2 °) On suppose le système initialement au repos.

a) Calculer la réponse impulsionelle $y_{imp}(t)$.

b) Calculer la réponse indicielle $y_{ind}(t)$.

Exercice 3 : *3 points*

Soient $x(t)$ et $y(t)$ l'entrée et la réponse du même système (S) modélisé par l'équation

$$y"(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

1. M. Cristofol, 25/05/19, tous droits réservés

On désigne par a un réel strictement positif et le signal $x(t)$ défini par

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ x(t) = 1 & \text{si} \quad 0 < t < a \\ x(t) = 0 & \text{si} \quad a < t. \end{cases}$$

1 °) Exprimer $x(t)$ en fonction des échelons unité.
2 °) Si : $x(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a)$, exprimer la réponse $y(t)$ du système (S) avec les nouvelles conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ à l'aide de $y_{imp}(t)$ et de $y_{ind}(t)$ trouvées dans l'exercice 2 questions $2^{\text{O}})a)$ et $2^{\text{O}})b)$.

Exercice 4 : *8 points*
On considère $x(t)$ une fonction $T-$périodique sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que sa série de Fourier soit égale à

$$S(x)(t) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right).$$

1 °)
Donner la pulsation de $x(t)$. En déduire que $T = 6$.
2 °)
Donner la valeur moyenne de $x(t)$. En déduire sans calcul la valeur de $\displaystyle\int_0^6 x(t)\,dt$.
3 °)
Tracer le spectre d'amplitude de $x(t)$. On ne tracera que les raies correspondant à $n = 1, 2, 3$.
4 °)
A-t-on $S(x)(t) = x(t)$ sur $\mathbb{R}$? Quel théorème permet de justifier votre réponse ? En déduire la valeur exacte de $x(0)$.
5 °)
On admet que la puissance moyenne de $x(t)$ est égale à $\dfrac{25}{6}$.
On filtre le signal $x(t)$ par un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure $f_c = 0,6$ Hz, ce qui signifie que l'on ne conserve que la valeur moyenne de $x(t)$ ainsi que ses harmoniques de fréquence inférieure à 0,6 Hz.
a)
Quelle est l'expression du signal filtré ?
b)
Quel est le pourcentage de puissance moyenne que l'on conserve après filtrage ? (Arrondir le résultat à 0,1 % près)

$\longleftrightarrow$