Institut Universitaire de Technologie
Aix-Marseille Université

Département GEII | Année 2015/2016
15 Mars 2016

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n°3 (1h30) CORRIGE

*Remarques*- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

**Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.**

**Exercice 1 :**
On va chercher une solution sous la forme $y(t) = u(t)e^{-3t}$ avec $u(t)$ une fonction polynomiale.
On a $y'(t) = (u'(t) - 3u(t))e^{-3t}$ donc la condition $y'(t) + 3y(t) = 4e^{-3t}$ équivaut à

$$(u'(t) - 3u(t))e^{-3t} + 3u(t)e^{-3t} = 4e^{-3t}.$$

On en déduit que $u'(t)e^{-3t} = 4e^{-3t}$ donc $u'(t) = 4$ . On choisit par exemple $u(t) = 4t$, donc on trouve la solution particulière $y(t) = 4te^{-3t}$.

**Exercice 2 :**
**1 °)** L'équation caractéristique est $X^2 + X - 2 = 0$. On trouve deux racines réelles $X = 1$ et $X = -2$ donc la solution de l'équation homogène est $y(t) = Ae^{-2t} + Be^t$, avec $A$ et $B$ deux constantes arbitraires.
**2 °)**
On va la chercher sous la forme $y_p(t) = at+b$. On a donc $y''(t)+y'(t)-2y(t) = 2t+1$ si et seulement si $a - 2(at + b) = 2t + 1$ pour tout réel $t$, donc $-2at + a - 2b = 2t + 1$ . Par identification on trouve $-2a = 2$ et $a - 2b = 1$ , d'où $a = -1$ et $b = -1$ .
Donc, $y_p(t) = -t - 1$.
**3 °)**
On utilise le Théorème de structure des solutions : $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-2t} + Be^t - t - 1$.
On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{Ae^{-2t} - t - 1}{t} = -1$, et par les croissances comparées, la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{Be^t}{t}$ ne peut être finie que si $B = 0$. On en déduit par somme de limite que la condition :
$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{t}$ est finie
est équivalente à $B = 0$.
Maintenant, $y(0) = 1$ signifie que $A + B - 1 = 1$, donc $A + B = 2$.
On trouve donc $y(t) = 2e^{-2t} - t - 1$.

**Exercice 3 :**
**1 °)** On a $y_h(t) = Ae^{-t}$, et on remarque que $y_p(t) = a$ est une solution particulière de l'équation.
Le Théorème de structure donne donc $y(t) = Ae^{-t} + a$.
La condition initiale donne $A + a = 1$ donc $A = 1 - a$.
Au final, $y(t) = (1 - a)e^{-t} + a$.

**2 °)**

**a )** On a $y(1) = (1-a)e^{-1} + a = (1-e^{-1})a + e^{-1} = a\dfrac{e-1}{e} + \dfrac{1}{e}$.

**b )** $y(1) = 0$ équivaut à $a\dfrac{e-1}{e} + \dfrac{1}{e} = 0$ donc $a\dfrac{e-1}{e} = \dfrac{-1}{e}$.

Cela donne $a = \dfrac{-1}{e}.\dfrac{e}{e-1} = \dfrac{1}{1-e}$

**Exercice 4 :**

**1 °)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

On pose $u(x) = x^2 + 1$. On a donc

$$\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u'(x)}{u(x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{u(x)}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}.$$

**2 °)** Il faut penser à une IPP, en posant $u'(t) = e^{-2t}$, $v(t) = t$, d'où $u(t) = \dfrac{-1}{2}e^{-2t}$ et $v'(t) = 1$.On a alors

$$\int_0^2 te^{-2t}\,dt = \int_0^2 u'(t)v(t)\,dt = \left[\frac{-t}{2}e^{-2t}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{2}e^{-2t}\,dt = -e^{-4} + \left[\frac{-1}{4}e^{-2t}\right]_0^2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}e^{-4}.$$

**3 °)**

On pose $u(t) = -t^2$ . On a ainsi

$$\int_0^1 te^{-t^2}\,dt = \frac{-1}{2}\int_0^1 u'(t)e^{u(t)}\,dt = \frac{-1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2}.$$

**4 °)** On procède d'abord à une décomposition en éléments simples de la fonction. On trouve :

$$\frac{t-2}{(t+2)(t+4)} = \frac{-2}{t+2} + \frac{3}{t+4}.$$

On obtient alors $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t-2}{(t+2)(t+4)}\,dt = [3\ln(t+4) - 2\ln(t+2)]_{-1}^1 = 3\ln(5) - 5\ln(3)$

**Exercice 5 :**

**1 °)** Si $t = 2s$, $s$ varie de 0 à 1, et $dt = 2ds$. On obtient alors

$$\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} = \int_0^1 \frac{2ds}{4s^2+4} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left[\arctan(s)\right]_0^1 = \frac{1}{2}.\arctan(1) = \frac{\pi}{8}$$

**2 °) a )**

On a $t$ qui varie de 0 à 2 et $dx = dt$ donc :

$$\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{(x+1)^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{2(t-1)+1}{t^2+4}\,dt = \int_0^2 \frac{2t-1}{t^2+4}dt.$$

**b )**

On a par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^2 \frac{2t-1}{t^2+4}dt = \int_0^2 \frac{2t}{t^2+4}dt - \int_0^2 \frac{dt}{t^2+4} = \left[\ln(t^2+4)\right]_0^2 - \frac{\pi}{8} = \ln(2) - \frac{\pi}{8}.$$