Département GEII Année 2017/2018
Janvier 2018

MATHÉMATIQUES - 1A - Corrigé DS n$^{\text{o}}$2 (1H30')

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.
Remarque sur le sujet : Les techniques de calcul des coefficients dans une DES sont à connaitre et sont plus efficaces à utiliser que la technique d'identification qui est à utiliser en dernier recours.

Exercice 1 : *4 points*
Soit la fraction rationnelle :

$$F_a(X) = \frac{3X^2 + aX + 18}{(X-2)(X^2+16)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1 °) Montrer que la décomposition en éléments simples de $F_a(X)$ a une partie entière nulle.

Le degré de $F_a(X)$ est égal à -1 donc $F_a(X)$ a une partie entière nulle.

2 °) Dorénavant $a = -5$, écrire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $F_{-5}(X)$.

$F_{-5}(X)$ est irréductible admet 2 pour pôle réel simple et $\pm 4j$ pour pôles complexes. On obteint la décomposition ci-dessous en utilisant les techniques de calcul vues en cours.

$$F_{-5}(X) = \frac{1}{X-2} + \frac{2X-1}{X^2+16}$$

Exercice 2 : *7 points*
Soit $P(X) = (X-1)^4(X-2)^5$ et la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{P'(X)}{P(X)}$.

---

1 °) a) Montrer que $P'(X) = (X-1)^3(X-2)^4(9X-13)$.

évident ...

$[(X-1)^4]' = 4(X-1)^3$ et $[(X-2)^5]' = 5(X-2)^4$, d'où :
$P'(X) = 4(X-1)^3(X-2)^5 + (X-1)^4 5(X-2)^4$ et en mettant en facteur $(X-1)^3(X-2)^4$ on obtient :
$P'(X) = (X-1)^3(X-2)^4[4X-8+5X-5]$, cqfd ...

b) En déduire la forme irréductible de $F(X)$ puis écrire sa décomposition en éléments simples.

$$F(X) = \frac{9X-13}{(X-1)(X-2)} = \frac{4}{X-1} + \frac{5}{X-2}.$$

2 °) Soit $f(t) = \ln(|P(t)|)$
a) Donner le domaine de définition de $f(t)$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ car les seules valeurs interdites sont celles pour lesquelles $P(t)$ s'annule.

b) Calculer $f'(t)$ de deux façons différentes et retrouver la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

$f'(t) = \dfrac{P'(t)}{P(t)} = F(t)$ mais on a aussi $f'(t) = [\ln(P(t))]' = [4\ln(t-1) + 5\ln(t-2)]' = \dfrac{4}{t-1} + \dfrac{5}{t-2}$, cqfd.

Exercice 3 : *4 points*

On pose $Z(x) = \dfrac{1 + j\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1+jx}$ pour $x \in]1, +\infty[$. On veut calculer $\arg Z(x)$.

1 °) Prouver que $\arg Z(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$ à 2π près.

$\arg Z(x) = \arg(1 + j\dfrac{1+x}{1-x}) - \arg(1+jx) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$.

2 °) Prouver que $(\arg Z(x))' = 0$.

$(\arg Z(x))' = \dfrac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2}{2+2x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$

3 °) En déduire la valeur de $\arg Z(x)$.

Donc $\arg Z(x) = \textit{constante}$ pour $x \in]1, +\infty[$ et en particulier pour $x \to +\infty$ on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \arg Z(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$$

pour $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 4 : *5 points*

1 °) Ecrire sous forme exponentielle la fonction $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}$.

$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)}$.

2 °) Donner son domaine de definition.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

3 °) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e$, en utilisant l'équivalent bien connu : $\ln(1+u) \sim u$ en 0. Attention ici on ne peut pas utiliser le critère de croissance comparée car on travaille au voisinage de 0 et on n'a pas $\ln x^2$ mais $\ln(1+x^2)$.

4 °) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$. Ici le critère de croissance comparée s'applique à merveille car on a une FI et $\ln(1+x^2) \sim \ln(x^2)$ en l'infini.

5 °) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Idem que ci-dessus : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$