

MATHÉMATIQUES - 1A - Corrigé DS n°2 (1H30')

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Remarque sur le sujet : Les techniques de calcul des coefficients dans une DES sont à connaître et sont plus efficaces à utiliser que la technique d'identification qui est à utiliser en dernier recours.

Exercice 1 : 5 points

1 °) Si $F(x)$ est réductible, soit 1 annule le numérateur donc si $a = -2$ soit -1 annule le numérateur soit si $a = 0$. Il faut donc a différent de ces deux valeurs.

2 °) Le degré de $F(X)$ est égal à 0 donc il y a une partie entière $E(X)$ (qui va être constante ici).

3 °) $F(X) = E(X) + \frac{A}{(X-1)} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{(X+1)}$ avec A, B, C réels.

Exercice 2 : 3 points

$$A = [F(X)X^3]_{X=0} = 3$$

On multiplie par X l'égalité de définition de $F(X)$, et on fait tendre X vers $+\infty$ on obtient : $1 + B = 3$ soit $B = 2$.

Enfin on remplace X par 1 on obtient $C = -1$.

Exercice 3 : 2 points

$$2^{x+1} = 3^x \Leftrightarrow (x+1)\ln 2 = x\ln 3 \Leftrightarrow x(\ln 2 - \ln 3) = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$$

Exercice 4 : 3 points

1 °) Il faut que l'argument du logarithme soit **strictement positif** soit $2e^x - 1 > 0$ soit $x > -\ln 2$ soit $x \in]-\ln 2, +\infty[$

2 °) $\ln(2e^x - 1) \leq 2 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \leq e^2 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{e^2 + 1}{2} \Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2}\right)$.

De plus d'après 1°), $x > -\ln 2$ donc les solutions sont dans l'intervalle : $]-\ln 2, \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2}\right)[$.

Exercice 5 : 9 points

1 °) $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$.

Or $(\arctan t)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(t+x) - \arctan t}{x}$. Si on applique pour $t = 0$ on en déduit : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x} = \left[\frac{1}{1+t^2} \right]_{t=0} = 1$. C'est la définition de $\arctan x \sim x$ quand $x \rightarrow 0$.

2 °)

a) $\arg(z_n) = n \arg(1 + j\pi/n) = n \arctan(\pi/n)$ car $1 > 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \arctan(\pi/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi/n = \pi$.

3 °)

a) $|z_n| = (1 + \pi^2/n^2)^{n/2}$

b) $\ln(1 + \pi^2/n^2) \sim \pi^2/n^2$ quand $n \rightarrow +\infty$.

c) $|z_n| = (1 + \pi^2/n^2)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \pi^2/n^2)}$.

D'après le 3°b) on a : $\frac{n}{2} \ln(1 + \pi^2/n^2) \sim \pi^2/2n \rightarrow 0$ quand n tends vers $+\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 1$.

4 °) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arg z_n = \pi$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = -1$.