Département GEII

Année 2020/2021
Janvier 2021

MATHÉMATIQUES - 1A - Corrigé DS n$^{\text{o}}$2 (1H30')

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *2 points*
Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^2 - 3X - 35$ en produit de deux polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Les racines de P sont 5 et $-\dfrac{7}{2}$. D'où : $P(X) = 2(X + \dfrac{7}{2})(X - 5)$.

Exercice 2 : *3 points*
Soit le polynome $P(X) = 5X^3 - 26X^2 + 21X + 36$.

1 °) Montrer que 3 est racine double de $P(X)$.

3 doit donc annuler $P(X)$ et $P'(X)$ ce qui est le cas avec $P'(X) = 15X^2 - 52X + 21$.

2 °) En déduire la troisième racine de $P(X)$.

Par division Euclidienne ou par identification rapide on trouve : $P(x) = (X - 3)^2(5X + 4)$ donc $-\dfrac{4}{5}$ est la troisième racine de $P(X)$.

Exercice 3 : *2 points*
Décomposer le polynôme $P(X) = X^3 + 8$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Le réel -2 est racine évidente puis par division Euclidienne ou par identification rapide on trouve : $P(x) = (X + 2)(X^2 - 2X + 4)$ et $X^2 - 2X + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant est négatif.

Exercice 4 : *5 points*
Soit a un nombre réel et $F_a(X) = \dfrac{2X^3 + X + a}{(X - 1)(X - 2)^2}$

1 °) Pour quelle(s) valeur(s) de a cette écriture est-elle irréductible ?

Il ne faut pas que 1 annule $2X^3 + X + a$ soit $a \neq -3$ et il ne faut pas que 2 annule $2X^3 + X + a$ soit $a \neq -18$

2 °) Montrer que l'écriture irréductible de $F_{-3}(X)$ est $\dfrac{2X^2 + 2X + 3}{(X - 2)^2}$

Car : $2X^3 + X - 3 = (X - 1)(2X^2 + 2X + 3)$.

3 °) Trouver la décomposition en éléments simples de $F_{-3}(X)$ sans oublier sa partie entière !.

Le seul pôle de $\dfrac{2X^2 + 2X + 3}{(X - 2)^2}$ est 2 qui est double. De plus, $\deg(F_{-3}(X)) = 0$ donc la partie entière est une constante. C'est 2 que l'on obtient par exemple en faisant la division Euclidienne. La décomposition en éléments simples formelle s'écrit donc : $F_{-3}(X) = 2 + \dfrac{A}{X - 2} + \dfrac{B}{(X - 2)^2}$. On calcule d'abord B grâce à $B = [F(X)(X - 2)^2]_{X=2} = 15$ puis en donnant à X la valeur 1 on déduit que $A = 10$.

Exercice 5 : *6 points*
Procéder à la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes. On admettra qu'elles sont écrites sous forme irréductible et que la partie entière est nulle.

1 °) $F(X) = \dfrac{3X}{(X-1)(X+2)}$.

$F(X) = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{2}{X+2}$.

2 °) $F(X) = \dfrac{8X-4}{X^2(X^2+4)}$.

$F(X) = \dfrac{2}{X} - \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{-2X+1}{X^2+4}$.

Exercice 6 : *4 points*
Résoudre les équations suivantes :
1 °) $6 - 2e^{3x} = 2$.

$x = \dfrac{\ln 2}{3}$.

2 °) $\ln(2x+3) = 2\ln x$.

$x = 3$ car $x = -1$ est à éliminer.

3 °) $\ln(2x-4) = 3$.

$x = \dfrac{e^3+4}{2}$.

4 °) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = 3$.

$x = \ln 2$.