Département GEII[1]

Année 2020/2021
31 Mars 2021

MATHÉMATIQUES. Correction DS 2A n°3 (1h30)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable ni de montre connectée.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *13 points + 1 Bonus*

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

— Partie 1

1 °) Prouver que A est inversible. Calculer A^{-1}.

det $A = 21 \neq 0$ donc A est inversible. de plus d'après le cours : $A^{-1} = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

2 °) Calculer σ_A.

$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 7)(\lambda - 7)$ donc $\sigma_A = \{3; 7\}$.

3 °)

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A et que le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur propre de A.

On a : $A\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{u}$, et $A\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -21 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\overrightarrow{v}$.

b) Prouver que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur propre de A^{-1}. A quelle valeur propre est il associé ?

On a $A^{-1}\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{u}$. Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\dfrac{1}{3}$ inverse de la valeur propre 3 de A.

c) [Bonus] Retrouver ce résultat en partant de l'égalité matricielle : $A\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{u}$.

1. M. Cristofol, E. Jalade, 18/03/21, tous droits réservés

On a en composant par A^{-1} à gauche : $A^{-1}A\overrightarrow{u} = 3A^{-1}\overrightarrow{u}$ soit encore $A^{-1}\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u}$, car $A^{-1}A = I_2$.

d) En déduire le spectre $\sigma_{A^{-1}}$ de A^{-1}.

On applique le résultat et la méthode de la question $3^{o}b)$ à $\overrightarrow{v}$ qui est donc vecteur propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{7}$. D'où $\sigma_{A^{-1}} = \left\{\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right\}$.

— Partie 2

On considère le système numérique suivant : $\begin{cases} u_n = 6u_{n-1} - 3v_{n-1}, \\ v_n = -u_{n-1} + 4v_{n-1}. \end{cases}$

4 °) Si on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, vérifier que $U_n = AU_{n-1}$ et donc que $U_n = A^nU_0$.

Evident car vu en TD !!!

5 °) On veut calculer u_8 et v_8.

a) Prouver que A est diagonalisable.

On sait que $\sigma_A = \{3; 7\}$, donc A a toutes ses valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

b) On admet que la matrice de passage s'écrit : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice diagonale associée D.

On applique la relation : $D = P^{-1}AP$ avec $P^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

c) Rappeler le lien entre A^8 et D^8 et en déduire la valeur exacte de A^8.

On a $A^8 = PD^8P^{-1}$ et donc : $A^8 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^8 & 0 \\ 0 & 7^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}3^8 + \frac{3}{4}7^8 & \frac{1}{4}3^9 - \frac{3}{4}7^8 \\ \frac{1}{4}3^8 - \frac{1}{4}7^8 & \frac{1}{4}3^9 + \frac{1}{4}7^8 \end{pmatrix}$

d) En déduire la valeur de u_8 et de v_8 si on a $u_0 = 2$ et $v_0 = 4$.

D'où puisque d'après $4^{o})$ $U_8 = A^8U_0$ on obtient :

$\begin{pmatrix} u_8 \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}3^8 + \frac{3}{4}7^8 & \frac{1}{4}3^9 - \frac{3}{4}7^8 \\ \frac{1}{4}3^8 - \frac{1}{4}7^8 & \frac{1}{4}3^9 + \frac{1}{4}7^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7.3^8 - 3.7^8 \\ 7.3^8 + 7^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8624238 \\ 2905364 \end{pmatrix}$ ce dernier calcul étant facultatif.

Exercice 2 : *4 points*

Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1 °) Calculer N^2 et N^3.

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

2 °) Si λ est valeur propre de N, on rappelle qu'il existe un vecteur X non nul tel que : $NX = \lambda X$. En déduire que :

a) Ce vecteur X est aussi vecteur propre de N^2 associé à la valeur propre λ^2 et que X est aussi vecteur propre de N^3 associé à la valeur propre λ^3.

On peut écrire en multipliant par N à gauche : $N^2X = \lambda NX = \lambda.\lambda X$ d'après le rappel et donc : $N^2X = \lambda^2 X$. En multipliant à nouveau par N à gauche et en appliquant le même raisonnement on obtient : $N^3X = \lambda^3 X$.

---

b) Montrer que la seule valeur propre de N est zéro.

On a vu dans 1^{o}) que N^3 est la matrice nulle qui n'admet que la valeur propre 0. Donc d'après la question précédente dans laquelle on a montré que les valeurs propres de N^3 sont égales au cube de celles de N on en déduit le résultat cherché..

Exercice 3 : *6 points*

Soit une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres α et β supposées positives. On construit la matrice d'ordre 4 notée M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On va prouver que $P_M(\lambda) = P_B(\lambda^2)$.

1 °) Ecrire sans le calculer $\det(M - \lambda I_4) = P_M(\lambda)$.

$$\det(M - \lambda I_4) = P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & b & -\lambda & 0 \\ c & d & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

---

2 °) Effectuer la transformation sur les colonnes du déterminant de $M - \lambda I_4$: $C_1 \to C_1 + \lambda C_3$ puis toujours sur le déterminant de $M - \lambda I_4$ la transformation sur les colonnes : $C_2 \to C_2 + \lambda C_4$.

On commence par $C_1 \to C_1 + \lambda C_3$ et on obtient : $\det(M - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a - \lambda^2 & b & -\lambda & 0 \\ c & d & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

On continue avec $C_2 \to C_2 + \lambda C_4$ qui donne :

$$\det(M - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a - \lambda^2 & b & -\lambda & 0 \\ c & d - \lambda^2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

---

3 °) Développer le déterminant ainsi obtenu et conclure que $P_M(\lambda) = P_B(\lambda^2)$. En déduire le spectre de M.

On développe par rapport à la première ligne (qui contient maintenant 3 zéros!!!) ce qui donne :

$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a - \lambda^2 & b & 0 \\ c & d - \lambda^2 & -\lambda \end{vmatrix}$ puis on développe par rapport à la première ligne ce qui donne :

$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} a - \lambda^2 & b \\ c & d - \lambda^2 \end{vmatrix} = P_B(\lambda^2)$. Donc le carré des valeurs propres de M sont valeurs propres de B soit si $\sigma_B = \{\lambda_1; \lambda_2\}$ alors $\sigma_M = \{\pm(\lambda_1)^{\frac{1}{2}}; \pm(\lambda_2)^{\frac{1}{2}}\}$, soit 4 valeurs éventuellement complexes.

---

4 °) Application : Si $B = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, donner le spectre de B et en utilisant le résultat de la question précédente donner le spectre de M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a facilement que $\sigma_B = \{4; 9\}$ et donc $\sigma_M = \{-2; 2; -3; 3\}$.