Département GEII

Année 2014/2015
21 Mars 2017

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n$^{o}$3 (1h30) CORRIGE

*Remarques*- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable. **Le barème est sur 22 mais la note sera laissée telle quelle sur 20**.

**Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.**

**Exercice 1 :** *5 points*

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(2t-1)^3}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2}{(2t-1)^3}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u'(t)}{u(t)^3}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2u^2(t)}\right]_1^2$$
$$= \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{2}{9}.$$

On procède par I.P.P pour J :

$$J = \int_0^2 te^{3t}\,dt = \left[\frac{te^{3t}}{3}\right]_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 e^{3t}\,dt$$

$$= \frac{2e^6}{3} - \left[\frac{e^{3t}}{9}\right]_0^2 = \frac{5e^6}{9} + \frac{1}{9}.$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(5t)\,dt = \left[\frac{\sin(5t)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{10}$$

Par une décomposition en éléments simples, on a :

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

En intégrant :

$$L = \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\,dt = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = \ln(2) - \ln(3) - (0 - \ln(2)) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

$$M=\int_0^1 t^3(t^4+1)^5\,dt=\frac{1}{4}\int_0^1 4t^3(t^4+1)^5\,dt=\frac{1}{4}\int_0^1 u'(t)u^5(t)\,dt=\frac{1}{4}\left[\frac{u^6(t)}{6}\right]_0^1=\frac{1}{24}(2^6-1)=\frac{21}{8}.$$

**Exercice 2 :** *4 points*

**1 °)** D'une part, puisque $t=3x+3$, on a $x=\dfrac{t-3}{3}$. Donc si $t$ va de 0 à 3, $x$ va de $\dfrac{0-3}{3}$ à $\dfrac{3-3}{3}$, c'est à dire de -1 à 0.
D'autre part, puisque $t=3x+3$, $\dfrac{dt}{dx}=3$ donc $dt=3dx$.
Enfin,

$$I=\int_0^3 \frac{t}{t^2-6t+18}\,dt=\int_{-1}^0 \frac{3(x+1)}{9(x+1)^2-18(x+1)+18}\,3dx=\int_{-1}^0 \frac{9(x+1)}{9x^2+9}\,dx=\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx.$$

**2 °)**

$$I=\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)\right]_{-1}^0=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(2)}{2}.$$

**Exercice 3 :** *4 points*

**1 °)**
L'équation caractéristique de $(E)$ est $X^2+4X+4$. Elle admet une racine double $X=-2$, donc le cours nous donne la solution générale

$$y(t)=(A+Bt)e^{-2t},$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes arbitraires.

**2 °)** On a $1=y(0)=A$ d'où $A=1$. On calcule $y'(t)=(B-2A-2Bt)e^{-2t}=(B-2-2Bt)e^{-2t}$ car $A=1$.
On a donc $0=y'(0)=B-2$ d'où $B=2$.
Finalement,$y(t)=(1+2t)e^{-2t}$.

**Exercice 4 :** *4 points*

**1 °)**
On pose $y(t)=u(t)e^{-3t}$ avec $u(t)$ une fonction inconnue à déterminer. On injecte dans l'équation, ce qui donne :

$$te^{-3t}=y'(t)+3y(t)=(u'(t)-3u(t))\,e^{-3t}+3u(t)e^{-3t}=u'(t)e^{-3t}.$$

On doit donc avoir $u'(t)e^{-3t}=te^{-3t}$, c'est à dire $u'(t)=t$. On prend $u(t)=\dfrac{t^2}{2}$ qui convient.

On a donc une solution particulière avec $y(t)=\dfrac{t^2}{2}e^{-3t}$.

**Exercice 5 :** *5 points*

**1 °)**
Si $y(t)$ est une solution de $(A)$, on a :

$$y'(t)=4\int_0^t y(s)\,ds-4t.$$

La fonction $y$ étant continue, la fonction $t \to \int_0^t y(s)\,ds$, qui n'est rien d'autre que la primitive de $y(t)$ qui s'annule en 0, est donc dérivable. L'égalité ci-dessus montre alors que la fonction $y'(t)$ est dérivable, comme différence de deux fonctions dérivables.

**2 °)**

On peut dériver l'équation $(A)$, pour obtenir :

$$y''(t) - 4\frac{d}{dt}\left(\int_0^t y(s)\,ds\right) = 4$$

$$y''(t) - 4y(t) = 4.$$

**3 °)**

**a )** On fait $t = 0$ dans l'équation $(A)$ :

$$y'(0) = 4\int_0^0 y(s)\,ds + 4 \times 0.$$

Vu que $\int_0^0 y(s) = 0$, on a : $y'(0) = 0$.

**b )** Il suffit de donner une solution de $(B)$ telle que $y'(0) \neq 0$.

Résolvons l'équation (B) : l'équation caractéristique $X^2 - 4 = 0$ a pour racines $-2$ et 2 donc la solution de l'équation homogène est $y_h(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$. Une solution particulière de l'équation (B) est $y_p(t) = -1$ donc les solutions de l'équation (B) sont les fonctions de la forme $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} - 1$. Pour avoir $y'(0) \neq 0$, on prend par exemple, $y(t) = e^{2t} - 1$.

**c )** L'ensemble des solutions de (A) est strictement inclus dans l'ensemble des solutions de (B). Autrement dit, toutes les solutions de (A) sont solutions de (B), mais il y a des solutions de (B) qui ne sont pas solutions de (A).

**Prolongement de l'exercice** On pourrait aussi se demander quelles sont exactement les solutions de l'équation (A). On sait qu'elles sont solutions de (B) donc on a $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} - 1$.

La seule chose que l'on peut dire est que les solutions de (A) sont **certaines** fonctions de la forme $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} - 1$. Pour savoir précisément lesquelles, on remplace $y(t)$ par $Ae^{2t} + Be^{-2t} - 1$ dans l'équation $(A)$. On trouve :

$$2Ae^{2t} - 2Be^{-2t} - 4\int_0^t Ae^{2s} + Be^{-2s} - 1\,ds = 4t$$

$$2Ae^{2t} - 2Be^{-2t} - 4\left[\frac{A}{2}e^{2s} - \frac{B}{2}e^{-2s} - s\right]_0^t = 4t$$

$$2Ae^{2t} - 2Be^{-2t} - 4\left(\frac{A}{2}e^{2t} - \frac{B}{2}e^{-2t} - t - \frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = 4t$$

$$2Ae^{2t} - 2Be^{-2t} - 2Ae^{2t} + 2Be^{-2t} + 4t + 2A - 2B = 4t$$

$$2A - 2B = 0$$

$$A = B.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (A) est donné par $y(t) = A(e^{2t} + e^{-2t}) - 1$, qui est exactement l'ensemble des solutions de (B) avec la condition initiale partielle $y'(0) = 0$. Ainsi la condition $y'(0) = 0$ trouvée au 3)a) est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour qu'une solution de (B) soit aussi solution de (A).