Département GEII [1]

Année 2018/2019
5 Juin 2019

MATHÉMATIQUES. Corrigé DS n$^{\text{o}}$4 (1h30)

Exercice 1 : *6 points*

1 °) Donner en justifiant vos réponses la nature des intégrales suivantes (on ne les calculera pas) :

a) $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) dx.$

On remarque que $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) > 0$ et on a : $\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) \sim \dfrac{1}{x^4}$ en $+\infty$, d'où $x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) \sim \dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le critère de l'équivalent I_1 converge.

ATTENTION : ON NE DIT PAS QUE DEUX INTEGRALES SONT EQUIVALENTES!!!

---

b) $I_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2+\cos x}{3x^3}\, dx.$

On remarque que $\dfrac{2+\cos x}{3x^3} > 0$ et on va appliquer le critère de comparaison avec :
$\dfrac{2+\cos x}{3x^3} < \dfrac{3}{3x^3} = \dfrac{1}{x^3}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ converge (Intégrale de Riemann) d'où I_2 converge.

---

c) $I_3 = \displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{(2x+1)\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x^3+2}}\, dx.$

On applique le critère de l'équivalent et $0 < \dfrac{(2x+1)\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x^3+2}} \sim \dfrac{2}{x}$ en $+\infty$. Or $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge (Intégrale de Riemann) donc I_3 diverge.

---

2 °) Calculer I_4 après avoir prouvé qu'elle converge : $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+1} dt.$

On applique le critère de l'équivalent et $0 < \dfrac{1}{t^2+2t+1} \sim \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge (Intégrale de Riemann) donc I_4 converge.

1. M. Cristofol 25/05/19, tous droits réservés

Pour le calcul on remarque que $I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+1} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[-\frac{1}{(t+1)} \right]_1^{+\infty} = 1/2.$

Exercice 2 : *5 points (+1 bonus)*
Soient $x(t)$ et $y(t)$ l'entrée et la réponse d'un système(S) modélisé par l'équation

$$y"(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

1 °) Calculer la fonction de transfert du système. Préciser la stabilité du système.

$H(p) = \frac{1}{p^2+2p+5}$. La partie réelle des pôles vaut $-1 < 0$ donc le système est stable.

---

2 °) On suppose le système initialement au repos.
a) Calculer la réponse impulsionnelle $y_{imp}(t)$.

Le système étant initialement au repos, on peut donc utiliser la formule du cours $Y(p) = H(p)X(p)$. Ici $X(p) = 1$ car $x(t) = \delta$ et donc $Y(p) = \frac{1}{p^2+2p+5} = \frac{1}{(p+1)^2+2^2} = 1/2\frac{2}{(p+1)^2+2^2}$ et le formulaire nous donne :
$y(t) = (1/2)e^{-t}\sin(2t)\mathcal{U}(t)$.

---

b) Calculer la réponse indicielle $y_{ind}(t)$.

Même argument et $x(t) = \mathcal{U}(t)$ donc $X(p) = \frac{1}{p}$. D'où $Y(p) = \frac{1}{p(p^2+2p+5)}$ pas dans le formulaire donc on décompose en éléments simples.
$Y(p) = \frac{\frac{1}{5}}{p} + \frac{-\frac{1}{5}p - \frac{2}{5}}{(p+1)^2+2^2} = \frac{\frac{1}{5}}{p} - \frac{1}{5}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right).$
d'où :

$$y_{ind}(t) = \frac{1}{5}\left[1 - e^{-t}\cos(2t) - (1/2)e^{-t}\sin(2t)\right].$$

Exercice 3 : *3 points*
Soient $x(t)$ et $y(t)$ l'entrée et la réponse du même système (S) modélisé par l'équation

$$y"(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

On désigne par a un réel strictement positif et le signal $x(t)$ défini par

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ x(t) = 1 & \text{si} \quad 0 < t < a \\ x(t) = 0 & \text{si} \quad a < t. \end{cases}$$

1 °) Exprimer $x(t)$ en fonction des échelons unité.

$x(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a)$.

2 °) Si : $x(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-a)$, exprimer la réponse $y(t)$ du système (S) avec les nouvelles conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ à l'aide de $y_{imp}(t)$ et de $y_{ind}(t)$ trouvées dans l'exercice 2 questions $2^{\text{O}})a)$ et $2^{\text{O}})b)$.

Si on écrit la Transformée de Laplace de l'équation modélisant (S), on obtient avec les nouvelles conditions initiales : $p^2Y(p) + 2pY(p) + 5Y(p) = X(p) + 1$. Or $X(p) = 1/p(1 - e^{-ap})$ et donc $Y(p) = H(p)/p - e^{-ap}H(p)/p + H(p)$. D'après l'exercice précédent, on obtient :

$$y(t) = y_{ind}(t) - y_{ind}(t-a) + y_{imp}(t).$$

Exercice 4 : *8 points*
On considère $x(t)$ une fonction $T-$périodique sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que sa série de Fourier soit égale à

$$S(x)(t) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right).$$

1 °)
Donner la pulsation de $x(t)$. En déduire que $T = 6$.

On prend la pulsation du fondamental $\omega = \frac{\pi}{3}$ et donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6$.

---

2 °)

Donner la valeur moyenne de $x(t)$. En déduire sans calcul la valeur de $\int_0^6 x(t)\,dt$.

$< x(t) >= 2$ et par définition : $\int_0^6 x(t)\,dt = 6 < x(t) >= 12$.

---

3 °)
Tracer le spectre d'amplitude de $x(t)$. On ne tracera que les raies correspondant à $n = 1, 2, 3$.

$D_1 = 1/2$; $D_2 = 1/4$; $D_3 = 1/8$.

---

4 °)
A-t-on $S(x)(t) = x(t)$ sur $\mathbb{R}$? Quel théorème permet de justifier votre réponse ? En déduire la valeur exacte de $x(0)$.

Oui d'apres le théorème de Dirichlet la dérivabilite de $x(t)$ sur $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que $S(x)(t) = x(t)$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $x(0) = S(x)(0) = 2$.

---

5 °)
On admet que la puissance moyenne de $x(t)$ est égale à $\frac{25}{6}$.

On filtre le signal $x(t)$ par un filtre passe-bas parfait de fréquence de coupure $f_c = 0,6$ Hz, ce qui signifie que l'on ne conserve que la valeur moyenne de $x(t)$ ainsi que ses harmoniques de fréquence inférieure à 0,6 Hz.

a)

Quelle est l'expression du signal filtré ?

La fréquence propre du signal est $f_1 = 1/6$. Donc on garde les 3 premiers harmoniques et si on note $x_f(t)$ le signal ainsi filtré,

$$x_f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right).$$

---

b)

Quel est le pourcentage de puissance moyenne que l'on conserve après filtrage ? (Arrondir le résultat à 0,1 % près)

$$\frac{< x_f^2 >}{25/6} = \frac{2^2 + 1/2((1/2)^2 + (1/4)^2 + (1/8)^2)}{25/6} = 0,9993$$

soit 99,93 %.