Institut Universitaire de Technologie
Aix*Marseille Université

Département GEII

Année 2015/2016
5 Janvier 2016

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n°2 (1H30')

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.
Le barême est noté sur 23 points, la note maximale sera de 20.

Exercice 1 : *3 points*

1 °) On doit avoir $t > 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

2 °) $\lim\limits_{0} \dfrac{\ln t}{t} = -\infty$ par quotient de limites.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ par les croissances comparées.

3 °) a) On a $f(t) = \dfrac{u(t)}{v(t)}$ donc :

$$f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{v(t)^2} = \frac{\frac{1}{t}.t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}.$$

b) $f'(t)$ est du signe de $1 - \ln t$ qui est positif si et seulement si $t < e$.. On déduit que f est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$. Son maximum est atteint en $t = e$ et vaut $f(e) = \dfrac{1}{e}$.

Exercice 2 : *4 points*

1 °)

$$F_\alpha(X) = \frac{AX + B}{X^2 + \alpha^2} + \frac{C}{X - 2} + \frac{D}{(X - 2)^2} + \frac{E}{X + 1}.$$

2 °) On a, après simplification par X : $F_0(X) = \dfrac{X^2 - 3X}{(X^2)(X - 2)^2(X + 1)} = \dfrac{X - 3}{X(X - 2)^2(X + 1)}$.

La décomposition formelle devient :

$$F_0(X) = \frac{A}{X} + \frac{B}{X - 2} + \frac{C}{(X - 2)^2} + \frac{D}{X + 1}.$$

On a par les techniques habituelles :

$A = \dfrac{-3}{(-2)^2} = \dfrac{-3}{4}$.

$C = \dfrac{2 - 3}{2 \times (2 + 1)} = \dfrac{-1}{6}$.

$D = \dfrac{-1-3}{-1\times(-1-2)^2} = \dfrac{4}{9}$.

Pour trouver B, on peut remplacer X par 1 : on obtient $F_0(1) = A - B + C + \dfrac{1}{2}D$ ce qui donne $-1 = \dfrac{-3}{4} - B - \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{9}$. On en tire $D = \dfrac{11}{36}$.

Exercice 3 : *3 points*

Argument 1 : La partie entière est obtenue par quotient de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^5 + 3X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 3X - 1$. Son degré vaut $\deg(P) - 5 = 1$. Or dans la décomposition proposée, la partie entière est la constante 1, qui est de degré 0.

Argument 2 : Le polynôme $X^2 - 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ donc la fraction $\dfrac{3}{X^2-1}$ n'est pas un élément simple de première espèce.

Argument 3 : La fraction $\dfrac{X}{(X+1)^3}$ n'est pas un élément simple de première espèce : son numérateur devrait être une constante.

Exercice 4 : *5 points*

1 °) a) On a $1 > 0$ donc $\arg(1 + j(x+3)) = \arctan(\dfrac{x+3}{1}) = f(x)$. Même raisonnement pour $g(x)$.

b) On a, d'après la question précédente, à 2π près :

$$f(x) + g(x) = \arg(1 + j(x+3)) + \arg(1 + j(\frac{1}{x+3})) = \arg((1 + j(x+3))(1 + j(\frac{1}{x+3})),$$

En développant, on trouve $(1 + j(x+3))(1 + j(\dfrac{1}{x+3})) = j\left(x + 3 + \dfrac{1}{x+3}\right)$ qui est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive car $x \in]-3, +\infty[$.

On a donc $f(x) + g(x) = \arg((1 + j(x+3))(1 + j(\dfrac{1}{x+3})) = \dfrac{\pi}{2}$.

NB : rigoureusement parlant, on n'a prouvé cette égalité qu'à 2π près. Mais puisque la fonction arctan est comprise entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$, $f(x) + g(x)$ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, donc l'égalité à 2π près est en fait une égalité tout court.

c) Fait dans la question précédente.

2 °)

a) On a : $f'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2+1}$

$g'(x) = \dfrac{\frac{-1}{(x+3)^2}}{\frac{1}{(x+3)^2}+1} = \dfrac{-1}{1+(x+3)^2}$, en utilisant la formule de dérivation de $\arctan(u(x))$.

Donc $(f(x) + g(x))' = 0$ quel que soit $x \in]-3, +\infty[$.

b) Puisque $(f(x)+g(x))' = 0$ quel que soit $x \in]-3, +\infty[$, on en déduit que la fonction $f+g$ est constante sur $]-3, +\infty[$. On a donc $f(x) + g(x) = f(-2) + g(-2) = \arctan(1) + \arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5 : *3 points*

1 °) $f(x) = e^{\frac{2}{x}\ln(x^2-x+1)}$.

Cette expression n'a de sens que si $x^2 - x + 1 > 0$ et $x \neq 0$. Or $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ quel que soit x réel. Donc cette fonction est définie sur tout $\mathbb{R}^*$.

2 °)

Par les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}\ln(x^2-x+1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$

3 °) $f(x) = 1$
$\leftrightarrow e^{\frac{2}{x}\ln(x^2-x+1)} = 1$
$\leftrightarrow \dfrac{2}{x}\ln(x^2-x+1) = 0$
$\leftrightarrow \ln(x^2-x+1) = 0$
$\leftrightarrow x^2-x+1 = 1$
$\leftrightarrow x^2-x = 0$
$\leftrightarrow x(x-1) = 0$
Il faut enlever la valeur interdite $x = 0$. On trouve donc l'unique solution $x = 1$.

Exercice 6 : *5 points*

1 °)

$4P(X)-XP'(X) = 4(X^4+18X^2+216X+405)-X(4X^3+36X+216) = 36X^2+648X+1620 = 36(X^2+18X+45).$

2 °)

a)

Soit x_0 la racine double de $P(X)$ (l'énoncé admet son existence et unicité). Alors, on sait que $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.
Donc, puisque $4P(X) - XP'(X) = 36(X^2+18X+45)$, on a en remplaçant X par x_0 :
$0 = 36(x_0^2+18x_0+45)$ c'est à dire $x_0^2+18x_0+45 = 0$.
Ensuite, en résolvant cette dernière équation du second degré, on trouve : $x_0 = -3$ ou $x_0 = -15$.

b) On teste avec -3 et 15. On trouve que $P(-3) = P'(-3) = 0$ donc que $x_0 = -3$.

3 °) Puisque -3 est racine double de $P(X)$, $(X+3)^2$ divise ce dernier.
Après division euclidienne, on trouve :

$$P(X) = (X+3)^2(X^2-6X+45).$$

Le discriminant de $X^2-6X+45$ vaut -144 : il est négatif donc $X^2-6X+45$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. **Conclusion** : $P(X) = (X+3)^2(X^2-6X+45)$ est la factorisation de $P(X)$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.