Département GEII Année 2014/2015
31 Mai 2016

MATHÉMATIQUES. Devoir surveillé n^{o}4 (1h30) CORRIGE

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 :

1 °) a) On a $f(t) \sim \frac{1}{t} > 0$ en $+\infty$. Le critère de Riemann implique la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ et le critère d'équivalence implique donc la divergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) On a $f^2(t) \sim \frac{1}{t^2} > 0$ en $+\infty$. Le critère de Riemann implique la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et le critère d'équivalence implique donc la convergence de $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$.

2 °)
Par le critère de croissances comparées, on a $e^t > t^9$ par exemple au voisinage de $+\infty$. On en déduit que $0 < \frac{t^7}{e^t} < \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$.
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc par le critère de comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{t^7}{e^t}dt$ converge.
Enfin, on note que $\frac{t^7+1}{e^t+1} \sim \frac{t^7}{e^t}$ en $+\infty$ ce qui prouve que $\int_{-1}^{+\infty} \frac{t^7+1}{e^t+1}dt$ converge par le critère d'équivalence.

3 °) $\int_2^X \sin(x)dx = \cos 2 - \cos(X)$. Cela prouve que $\lim_{X\to+\infty}\left(\int_0^X \sin(x)dx\right)$ n'existe pas vu que $\lim_{X\to+\infty} \cos(X)$ n'existe pas. On en déduit que $\int_2^{+\infty} \sin(x)dx$ diverge.

4 °) Si t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0, donc $\sin(e^{-t}) \sim e^{-t}$ si t tend vers $+\infty$. $e^{-t} > 0$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (par un calcul évident) , donc par le critère d'équivalence, $\int_0^{+\infty} \sin\left(e^{-t}\right)dt$ converge.

Exercice 2 :

1 °) D'après le cours, $H(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 5}$.

2 °)

En remarquant que l'on peut écrire $H(p) = \frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2}$, le formulaire donne $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(H(p)\right) = \frac{1}{2}e^t \sin(2t)U(t)$.

3 °) La limite de $h(t)$ en $+\infty$ n'existe pas (oscillations amplifiées) donc le système (S) n'est pas stable : on devrait avoir en effet $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$ pour avoir la stabilité.

4 °) Les pôles de $H(p)$ s'obtiennent en résolvant l'équation $p^2-2p+5 = 0$. On trouve $p = 1\mp 2j$. La partie réelle des pôles est strictement positive, donc le système (S) est instable.

5 °) Dans le premier cas, la fonction de transfert devient $H(p) = \frac{1}{p^2+2p+5}$. Le calcul des pôles donne $p = -1\mp 2j$. La partie réelle des pôles est strictement négative, donc le système (S) devient stable.
Dans le second cas cas, la fonction de transfert devient $H(p) = \frac{1}{p^2-2p-5}$. Un des deux pôles est un réel strictement positif (faire le calcul), donc le système reste instable.

Exercice 3 :

1 °) D'après le formulaire,

$$y(t) = 10M\cos(t)+\frac{1}{2}M^2\cos^2(t) = 10M\cos(t)+\frac{1}{4}M^2\left(1+\cos(2t)\right) = \frac{1}{4}M^2+10M\cos(t)+\frac{1}{4}M^2\cos(2t).$$

On reconnaît là une série de Fourier finie.

2 °)

La valeur moyenne de $y(t)$ vaut A_0 soit $< x(t) >= \frac{1}{4}M^2$.

Le théorème de Parseval donne $P_m(y) = A_0^2 + \frac{1}{2}\left(A_1^2+A_2^2\right)$. Cela donne

$$P_m(y) = \frac{1}{16}M^4 + 50M^2 + \frac{1}{32}M^4 = 50M^2 + \frac{3}{32}M^4.$$

3 °)

a) Ce terme représente la puissance moyenne transportée par le deuxième harmonique de $y(t)$.

b)

$$\tau_d = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{16}M^4}{50M^2+\frac{3}{32}M^4}} = \sqrt{\frac{M^4}{1600M^2+3M^4}} = \sqrt{\frac{M^2.M^2}{M^2(1600+3M^2)}} = \sqrt{\frac{M^2}{(1600+3M^2)}} = \frac{M}{\sqrt{(1600+3M^2)}}$$

c)

On résout donc $\frac{M}{\sqrt{(1600+3M^2)}} < \frac{1}{20}$, ce qui donne :

$$\frac{20M}{\sqrt{(1600+3M^2)}} < 1$$
$$\frac{400M^2}{1600+3M^2} < 1$$
$$400M^2 < 1600+3M^2$$
$$397M^2 < 1600$$
$$M < \frac{40}{\sqrt{397}} \sim 2.$$