Département GEII

Année 2016/2017
Mardi 18 Octobre 2016

MATHÉMATIQUES. CORRIGE Devoir surveillé 1A (1,5 heure)

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.
N.B : Le barème est sur 23 mais la note sera laissée telle quelle sur 20.

Exercice 1 : *4 points*

1 °)
$z_1 = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$

2 °)
$z_2 = je^{\frac{j\pi}{5}} = e^{j\frac{\pi}{2}}e^{\frac{j\pi}{5}} = e^{\frac{7j\pi}{10}}$

3 °)
$z_3 = (1-j)^7 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{-j\pi}{4}}\right)^7 = \sqrt{2}^7 e^{\frac{-7j\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{4}}$

4 °) $z_4 = \dfrac{1-j\sqrt{3}}{1+j} = \dfrac{2e^{\frac{-j\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{-7j\pi}{12}}$

Exercice 2 : *6 points*

1 °)
6 solutions.

2 °)
On calcule $\Delta = -1$, d'où $\delta = j$. L'application des formules donne :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j = e^{-\frac{j\pi}{6}},\ Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j = e^{\frac{j\pi}{6}}.$$

3 °)

a)
On trouve pour la première équation :

$$z = e^{\frac{j\pi}{18}},\ z = e^{\frac{13j\pi}{18}},\ z = e^{\frac{25j\pi}{18}}.$$

On trouve pour la deuxième équation :

$$z = e^{-\frac{j\pi}{18}},\ z = e^{-\frac{13j\pi}{18}},\ z = e^{-\frac{25j\pi}{18}}.$$

b)

On pose $Z = z^3$. Alors, Z vérifie l'équation $Z^2 - \sqrt{3}Z + 1 = 0$ dont on a trouvé les solutions à la première question. Ainsi, on a $z^3 = Z_1 = e^{-\frac{j\pi}{6}}$ ou $z^3 = Z_2 = e^{\frac{j\pi}{6}}$. On obtient alors les 6 solutions en réunissant les solutions des deux équations de la question précédente :

$$z \in \{e^{-\frac{25j\pi}{18}}; e^{-\frac{13j\pi}{18}}; e^{-\frac{j\pi}{18}}; e^{\frac{j\pi}{18}}; e^{\frac{13j\pi}{18}}; e^{\frac{25j\pi}{18}};\}$$

Exercice 3 : *4 points*

1 °) $P(-1) = -1 + a - a + 1 = 0$.

2 °)

Puisque -1 est racine de $P(X)$, ce dernier se factorise par $(X+1)$. Une division euclidienne donne :

$$P(X) = (X+1)(X^2 + (a-1)X + 1).$$

Les racines de $P(X)$ sont donc -1 et les racines de $X^2 + (a-1)X + 1$.
On commence par chercher une éventuelle racine multiple de $P(X)$. Cela ne peut arriver que dans deux cas :

(i) Cas 1 : -1 racine de $X^2 + (a-1)X + 1$.
Alors, $1-(a-1)+1 = 0$ donc $a = 3$. Dans ce cas, $P(X) = (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)(X+1)^2 = (X+1)^3$, donc -1 est alors racine triple de $P(X)$.

(i) Cas 2 : Le polynôme $X^2 + (a-1)X + 1$ admet une racine double ce qui veut dire que $\Delta = 0$. Cette dernière condition donne :

$$(a-1)^2 - 4 = 0$$

$$a - 1 = \pm 2,$$

d'où $a = 3$ ou $a = -1$. Le cas $a = 3$ a été traité dans le (i). Le cas $a = -1$ donne :

$$P(X) = (X+1)(X^2 - 2X + 1) = (X+1)(X-1)^2,$$

et dans ce cas 1 est une racine d'ordre 2. On a donc :

a) $a = -1$, et la racine d'ordre 2 est 1.

b) $a = 3$ et la racine d'ordre 3 est -1.

Exercice 4 : *4 points*

1 °)

$$(1+j\sqrt{3})^7 - (1-j\sqrt{3})^7 = \left(2e^{\frac{j\pi}{3}}\right)^7 - \left(2e^{\frac{-j\pi}{3}}\right)^7 = 2^7 e^{\frac{7j\pi}{3}} - 2^7 e^{\frac{-7j\pi}{3}} = 2^7\left(e^{\frac{7j\pi}{3}} - e^{\frac{7j\pi}{3}}\right)$$

$$= 2^7.2j\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 2^8 j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 256j\frac{\sqrt{3}}{2} = 128\sqrt{3}j.$$

Donc le module vaut $128\sqrt{3}$ et un argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$

2 °) $Z_2 = |z|^2 + (\overline{z})^2 = r^2 + r^2e^{-2j\theta} = r^2\left(1 + e^{-2j\theta}\right) = r^2e^{-j\theta}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) = 2r^2\cos(\theta)e^{-j\theta}$.
Puisque $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$,$\cos(\theta) \geq 0$, donc le module vaut $2r^2\cos(\theta)$ et un argument est $-\theta$.

Exercice 5 : *5 points*

1 °) $P(4) = 0$.

2 °)

Le polynôme $P(X)$ admet 4 comme racine donc est divisible par $X - 4$. Une division euclidienne donne :

$$P(X) = (X + 4)(X^2 - 2X + 4).$$

Le polynôme $X^2 - 2X + 4$ a un discriminant négatif donc est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3 °)

On trouve $z_1 = 1 - j\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + j\sqrt{3}$.

4 °)

$z_1 = 2e^{\frac{-j\pi}{3}}$ et $z_2 = 2e^{\frac{j\pi}{3}}$.