Département GEII

Année 2016/2017
10 Janvier 2017

MATHÉMATIQUES - 1A - Devoir surveillé n$^{\text{O}}$2 (1H30') CORRIGE

Remarques- Un très grand soin devra être apporté à la rédaction. Pas de téléphone portable.

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : *points*

1 °)

a)
On remarque que 1 est racine de $X^3 - 2X + 1$, donc ce dernier polynôme est divisible par $X - 1$ et on obtient par division euclidienne :

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1).$$

On a donc :

$$F_{-2}(X) = \frac{3(X^3 - 2X + 1)}{(X-1)^2(X^2+X+1)} = \frac{3(X-1)(X^2+X-1)}{(X-1)^2(X^2+X+1)} = \frac{3(X^2+X-1)}{(X-1)(X^2+X+1)},$$

après simplification par $X - 1$.

b)
On remarque que $X^2 + X + 1$ est irréductible car son Δ est négatif. La décomposition formelle est donc

$$(1)\ \ F_{-2}(X) = \frac{A}{X-1} + \frac{BX+C}{(X^2+X+1)}$$

(il n'y a pas de partie entière car le degré de $F_{-2}(X)$ est strictement négatif).
Par la méthode classique pour les pôles simples : $A = [(X-1)F_{-2}(X)]_{X=1} = 1$.
En multipliant l'égalité (1) par X puis en faisant $X \to +\infty$, on obtient l'égalité $3 = A + B = 1 + B$ ce qui donne $B = 2$.

En prenant la valeur $X = 0$ dans (1), on obtient : $3 = -A + C = -1 + C$ ce qui donne $C = 4$.
On a donc

$$F_{-2}(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{2X+4}{(X^2+X+1)}.$$

2 °)

a) La méthode classique donne $B = [(X-1)^2 F_a(X)]_{X=1} = \dfrac{3(2+a)}{3} = 2 + a$.

b) En multipliant l'égalité de la décomposition formelle par X puis en faisant $X \to +\infty$, on obtient l'égalité $3 = A + C = A + 2$ ce qui donne $A = 1$.

En prenant la valeur $X = 0$ dans l'égalité de la décomposition formelle on arrive à $3 = -A+B+D = -1 + a + 2 + D$ ce qui donne $D = 2 - a$.
On a donc

$$F_a(X) = \frac{1}{(X-1)} + \frac{a+2}{(X-1)^2} + \frac{2X+2-a}{(X^2+X+1)}.$$

Exercice 2 : *points*

1 °) a)
Par les propriétés de l'argument d'un quotient, on a $arg(z) = arg(1+2ja) - arg(a+j)$.

b) $arg(1+2ja) = \arctan(2a)$.
On a aussi

$$\begin{cases} arg(a+j) & = \pi + \arctan(\frac{1}{a}) \text{ si } a < 0, \\ arg(a+j) & = \frac{\pi}{2} \text{ si } a = 0, \\ arg(a+j) & \arctan(\frac{1}{a}) \text{ si } a > 0. \end{cases}$$

2 °) On a $arg(z) = arg(1+2ja) - arg(a+j)$. En remplaçant chaque argument par les expressions avec arctan trouvées précédemment, on obtient le résultat voulu.

3 °)
Dans chaque cas, on procède au changement de variable $x = \frac{1}{a}$ pour se ramener à une limite du cours. On a ainsi :
$\lim\limits_{a\to 0, a<0} \arctan(\frac{1}{a}) = \lim\limits_{x\to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.
$\lim\limits_{a\to 0, a>0} \arctan(\frac{1}{a}) = \lim\limits_{x\to +\infty} \arctan(x) = +\frac{\pi}{2}$.
On déduit de l'expression de f que

$$\lim_{a\to 0, a<0} f(a) = \lim_{a\to 0, a<0} \arctan(2a) - \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{a\to 0, a>0} f(a) = \lim_{a\to 0, a>0} \arctan(2a) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2}.$$

On obtient donc que $f(0) = \lim\limits_{a\to 0, a<0} f(a) = \lim\limits_{a\to 0, a>0} f(a)$ ce qui signifie exactement que f est continue en 0.

4 °)
Des calculs similaires à ceux de la question précédente montrent que $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{a\to-\infty} f(a) = -\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{-3\pi}{2}$.

5 °) On utilise la formule de dérivation de $\arctan(u(t))$ sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, ce qui donne :
pour $a < 0$: $f'(a) = \frac{2}{1+4a^2} - \frac{-\frac{1}{a^2}}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{2}{1+4a^2} + \frac{1}{a^2+1} = \frac{6a^2+3}{(1+4a^2)(1+a^2)}$.
pour $a > 0$: $f'(a) = \frac{6a^2+3}{(1+4a^2)(1+a^2)}$ (mêmes calculs).
La fonction f est continue et de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^*$: elle est donc strictement croissante.

6 °) f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue, avec $f(0) = -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $f(a) = 0$, et que cette solution a est nécessairement strictement positive.
On est donc amené, en prenant la formule de $f(a)$ pour $a > 0$, à résoudre l'équation

$$\arctan(2a) - \arctan(\frac{1}{a}) = 0,$$

qui équivaut à $2a = \dfrac{1}{a}$ car la fonction arctan est strictement monotone. La seule solution strictement positive de cette équation est $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Autre méthode : $f(a) = 0$ si et seulement si $z = \dfrac{1+2ja}{a+j}$ est un réel strictement positif ($\arg z = 0$). On écrit

$$z = \frac{1+2ja}{a+j} = \frac{(1+2ja)(a-j)}{a^2+1} = \frac{3a + j(2a^2-1)}{a^2+1}.$$

z est un réel strictement positif ssi $2a^2 - 1 = 0$ et $3a > 0$. La première condition donne $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et on élimine la solution négative par la condition $3a > 0$.

Exercice 3 : *points*

1 °)

$f(x) = e^{x\ln\left(\sqrt{x}\right)} = e^{\frac{1}{2}x\ln(x)}$ pour $x > 0$.
$g(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ pour $x > 0$ aussi .

2 °)

Par les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \sqrt{x}\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} \sqrt{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0, x>0} g(x) = e^0 = 1$.

3 °)

$f(x) = g(x)$
$e^{\frac{1}{2}x\ln(x)} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}$
$\dfrac{1}{2}x\ln(x) = \sqrt{x}\ln(x)$
$\dfrac{1}{2}x\ln(x) - \sqrt{x}\ln(x) = 0$
$(\dfrac{1}{2}\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}\ln(x) = 0$
$(\dfrac{1}{2}\sqrt{x} - 1)\ln(x) = 0$ car $x \neq 0$.

On a les deux possibilités $\dfrac{1}{2}\sqrt{x} - 1 = 0$ ou $\ln(x) = 0$ qui donnent les deux solutions valables $x = 1$ et $x = 4$.

4 °)

a)

On calcule d'abord (dérivation d'un produit) :

$$\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \sqrt{x}\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}.$$

Ensuite, on a (formule de dérivation d'une fonction exponentielle :

$$g'(x) = \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)' e^{\sqrt{x}\ln(x)} = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}.$$

b)

La fonction $g'(x)$ est du signe de $2 + \ln x$, qui est une fonction strictement croissante s'annulant en $x = e^{-2}$. On déduit que $g'(x)$ est négative sur $]0, e^{-2}[$ et positive sur $]e^{-2}, +\infty[$. Il vient que $g(x)$ est décroissante sur $]0, e^{-2}[$ et croissante sur $]e^{-2}, +\infty[$, donc que g admet un minimum en $x = e^{-2}$. Ce minimum vaut $g\left(e^{-2}\right) = \left(e^{-2}\right)^{\sqrt{e^{-2}}} = e^{-2e^{-1}}$.